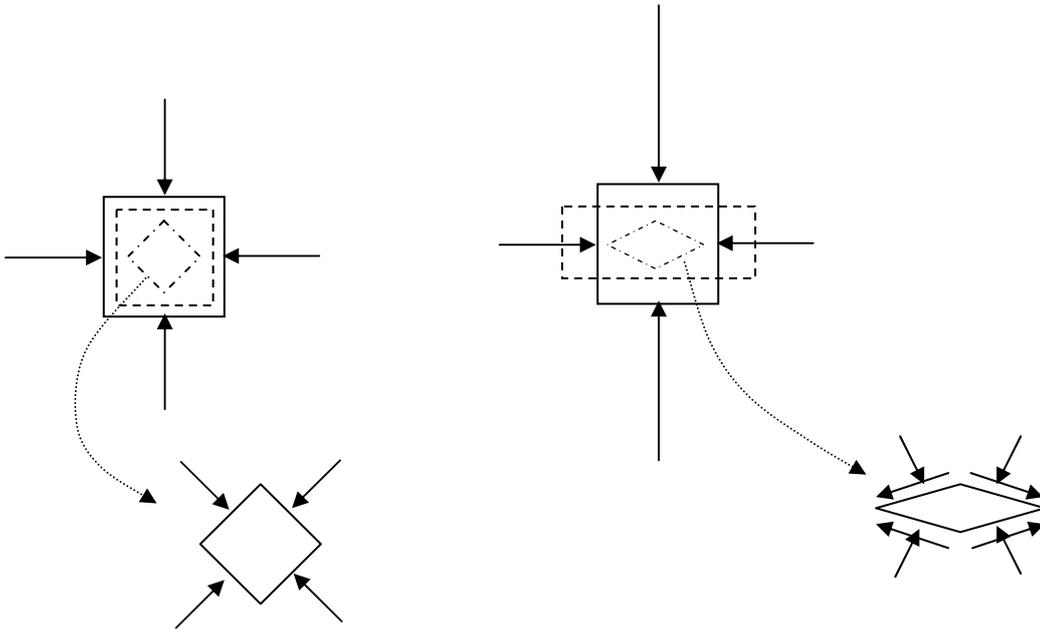


【多次元場での応力の表現】

(1) せん断力

圧密理論では、1次元しか考えていなかったもので、応力の成分は $\sigma$ だけで十分であった。しかし、土の強度と破壊を考える場合には、どうしても多次元での応力を導入する必要がある。物体が壊れるためには、必ず「ずらす、あるいは、ゆがめる」力(せん断力と呼ぶ)が働かなければならないが、その「せん断力」は、多次元場においてそれぞれ別方向から加わる力に差があることから生じているからである。例えば、下図のように、仮想的な小正方形要素に、鉛直と水平方向の力が働いている場合、両者が同じ大きさの力なら、等方的に圧縮するのみで、物体は決して壊れない。しかし、両者に差がある場合には、物体のある面には「ずらす、あるいは、ゆがめる」ような働きをするせん断力が働く。鉛直と水平方向の力の差があるレベルに達すると物体は破壊する。



(2) 応力ベクトルとその成分

応力とは単位面積あたりの力であるという説明があるが、それは応力の次元のことを言っているだけである。外力が作用しているある物体の微小要素を取り出してきて、その微小要素を2つに切断して、その切り口の $n$ 面に着目する。その $n$ 面には $\mathbf{T}^{(n)}$ という単位面積あたりの力が働いている。

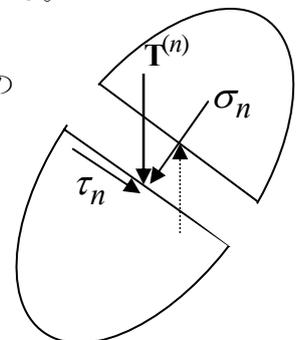
この $\mathbf{T}^{(n)}$ を応力ベクトルと呼ぶ。ベクトル量なので向きと大きさが決まっている。この応力ベクトル $\mathbf{T}^{(n)}$ は、通常、切り口の面に垂直な成分と切り口に沿った成分の2つ(3次元なら切り口に沿った成分が2つで合計3つ)で表される。

$$\mathbf{T}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_n \end{Bmatrix} \quad \sigma_n \text{を垂直応力と呼び、} \tau_n \text{をせん断応力と呼ぶ。}$$

これらは応力ベクトルの単なる成分であるので、スカラー量であるが、大抵の教科書では、図のように応力成分を表すにも矢印を用いて、便宜的にベクトルのように表している場合が多い。しかし本来は、基底ベクトル $\mathbf{e}_{n1}, \mathbf{e}_{n2}$ を用いて、

$$\mathbf{T}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{e}_{n1} + \tau_n \mathbf{e}_{n2}$$

と書くべきであり、ベクトル量はいくまで $\sigma_n \mathbf{e}_{n1}, \tau_n \mathbf{e}_{n2}$ であることを理解しておく必要がある。



### (3) 応力を表す座標系と応力テンソル

2次元の物体内のある点での応力状態を表すとき、適当に定めた  $x, y$  座標を用いると、 $x$  軸と  $y$  軸それぞれに垂直な切り口での2つの応力ベクトルを用いる。これを表すのに便宜上、右図が使われる。ほとんどの場合、応力ベクトルは省略されて、応力ベクトルの成分のみが描かれていることが多い。

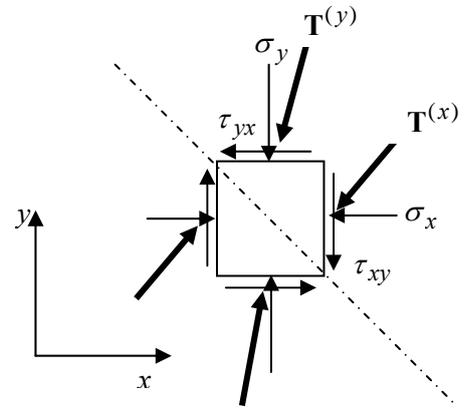
$$\mathbf{T}^{(x)} = \sigma_x \mathbf{e}_x + \tau_{xy} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{T}^{(y)} = \tau_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y$$

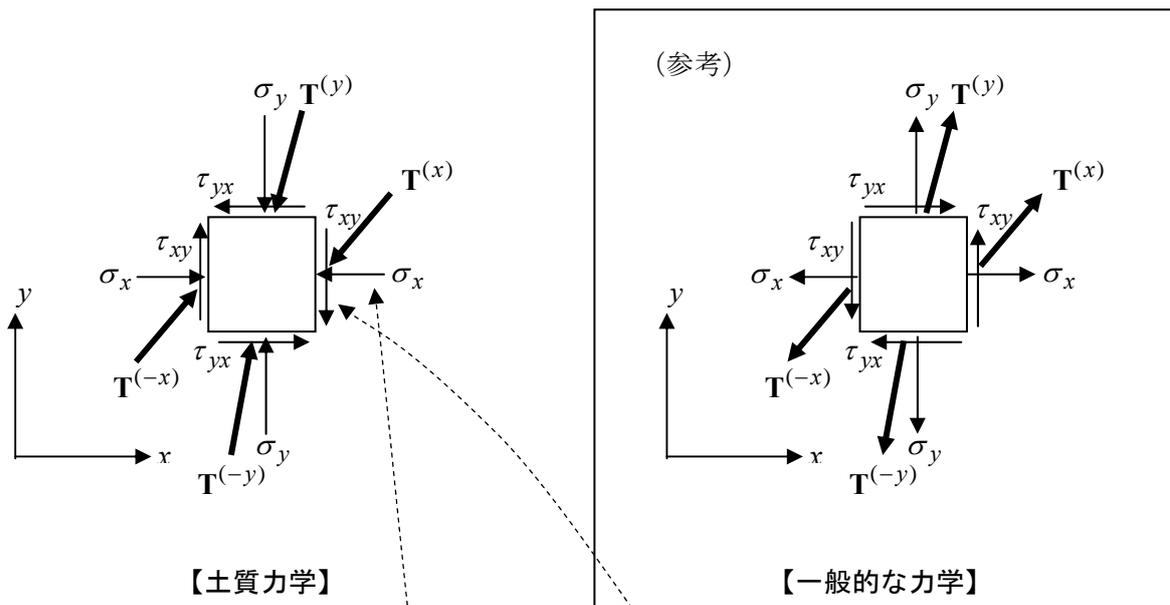
便宜上  $\begin{Bmatrix} \mathbf{T}^{(x)} \\ \mathbf{T}^{(y)} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix}$  のように演算

を表すことができるが、上の  $\boldsymbol{\sigma}$  を応力テンソルと呼ぶ。

（テンソルとは、行列で表されることからわかるように、一次変換の線形作用素であり、「ベクトルを掛けて、別のベクトルをつくる」作用をする。したがって、ベクトルを掛けてみて、はじめて物理的な意味がわかるものである。）



### (4) 土質力学での座標系の定義



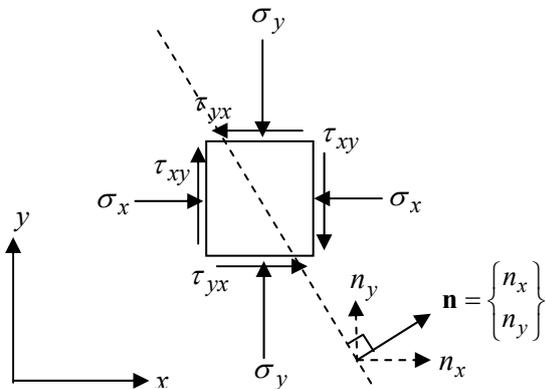
一般的な力学では、応力ベクトルは引っ張りを正にするのが普通である。しかし、引っ張力がほとんど期待できない「つぶつぶ」で構成されている材料（粒状体という）である土を扱う土質力学では、考慮すべき力（応力）のほとんどが圧縮であるので、垂直応力の向き（正確に言えば、応力ベクトルの垂直成分の向き）は圧縮が正となるようにするのが通例である。せん断応力の向きは、「垂直応力の符号に合わせる」ように決める。すなわち、垂直応力が  $x$  軸のマイナスの向きなら、その面に作用するせん断応力も  $y$  軸のマイナスの向きにする。

ここで、一般的な力学における応力の向きを見ると、すべての向きが逆になっているだけであり、そのため、以後の議論のほとんどは共通してできる。

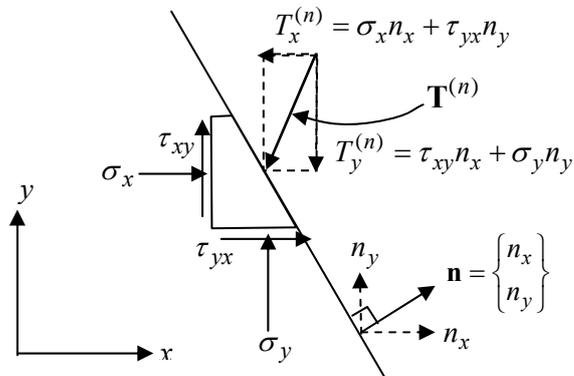
(5) コーシーの公式 (応力テンソルから任意の面に作用する応力ベクトルを計算する式)

$$\mathbf{T}^{(n)} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} \mathbf{n}$$

応力テンソルに任意の面の法線ベクトルを掛けると、その面に作用する 応力ベクトルが得られる。

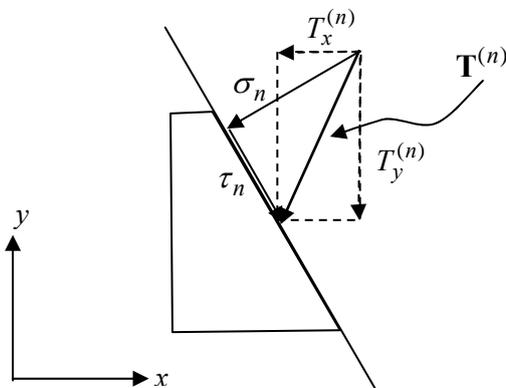


設定した xy 座標系ですべての垂直応力とせん断応力の成分が表される。



コーシーの公式で求められる応力ベクトルも元々設定した xy 座標系の成分で表される。

ただし、上図のように、応力ベクトルは設定した xy 座標系における x 成分と y 成分で表されるだけなので、応力ベクトルの作用面に対する垂直成分 (垂直応力)  $\sigma_n$  と平行成分 (せん断応力)  $\tau_n$  の大きさを知りたい場合\* には、別途、座標変換等の計算をする必要がある。



応力ベクトルを xy 座標系で表すのも大切だが、面に対しての垂直成分と平行成分の大きさを知らなければならない。

\*なぜ、垂直応力とせん断応力の大きさをそんなに知りたがるのにはワケがあるが、そのワケは後でわかる (はず)。

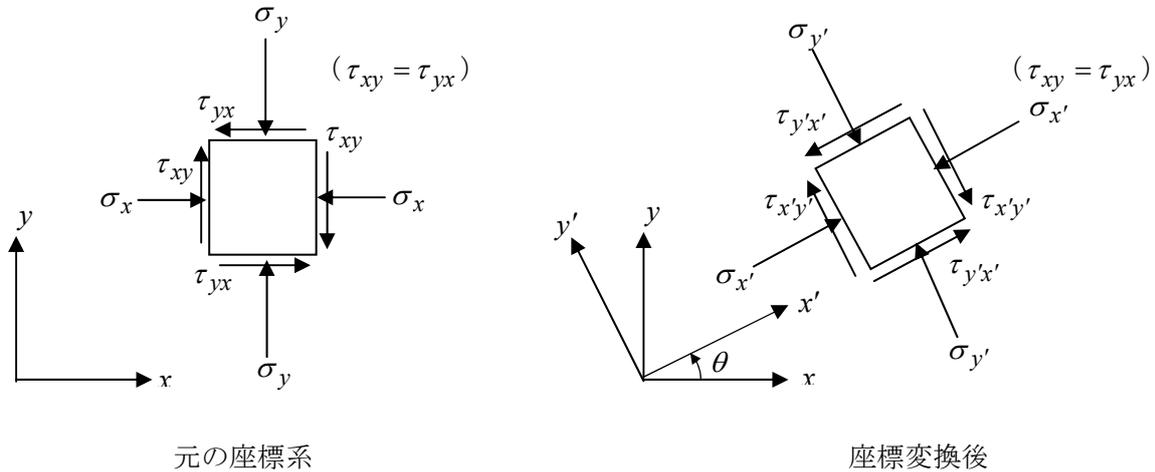
応力ベクトルに、xy 座標の基底ベクトル  $\mathbf{e}_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  をそれぞれ作用させると、

$$\mathbf{T}^{(x)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(y)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \quad (1)$$

となり、x 面 (x 軸に垂直な面) と y 面 (y 軸に垂直な面) での応力の x 成分, y 成分がわかる。x 面においては、x 成分が垂直応力であり、y 成分がせん断応力であるが、y 面においては、x 成分がせん断応力であり、y 成分が垂直応力であることに注意する。

## (6) 座標変換

任意の面の応力ベクトルがコーシーの公式で計算できても、それはあらかじめ決められた座標系での  $x$  成分と  $y$  成分がわかったに過ぎないので、その座標から傾いている面に作用している垂直応力とせん断応力は即座にわからない。しかし、式(1)からもわかるように、垂直応力とせん断応力を知りたいと思う面が、座標系の  $x$  方向か  $y$  方向のいずれかに一致さえしていれば、即座にその値を知ることができる。そのため、知りたい面に座標を合わせてやる。すなわち、座標変換を行う。



応力テンソルの座標変換について考察する。

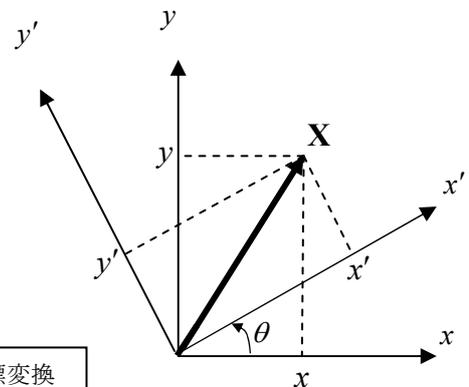
$xy$  座標系に対し、角度  $\theta$  だけ傾いた座標系  $x'y'$  を考える。空  $T$  間内にある任意のベクトル  $\mathbf{X}$  を  $xy$  座標系で表した座標が  $(x, y)$  であり、 $x'y'$  座標系で表した座標が  $(x', y')$  であったとすると、 $(x, y)$  と  $(x', y')$  の関係は、次式となる。

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

すなわち、

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2) \quad \leftarrow \text{ベクトルの座標変換}$$



上式は、 $xy$  座標系で観測していたベクトル量が、 $x'y'$  座標系ではどのように観測されるのかを表している。この見方を変える作業を座標変換と呼ぶ。特に、2次元の直交座標どうしの変換は、回転で表すことができるので、視覚的にもわかりやすい。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{とおけば、このテンソルは } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \text{ となる直交テンソルである。}$$

ここで、ある面での応力ベクトルを考える。

回転前の座標系で表したものを  $\mathbf{T}^{(n)}$ 、回転後の座標系で表したものを  $\mathbf{T}^{(n')}$  とすると、

$$\mathbf{T}^{(n')} = \mathbf{Q} \mathbf{T}^{(n)} \quad (3) \quad \leftarrow \text{ベクトルの座標変換}$$

となる。

一方、それぞれの座標系を用いてコーシーの公式を表すと、

$$\mathbf{T}^{(n')} = \boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{n}' \quad \text{および} \quad \mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (4)$$

となるので、これらを式(3)に代入すると、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{n}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (5)$$

となるが、式(3)にならぬ、 $\mathbf{n}' = \mathbf{Q} \mathbf{n}$  であるので、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{Q} \mathbf{n} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (6)$$

となる。法線ベクトル  $\mathbf{n}$  にかかるテンソル部分を比較すると、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \quad (7)$$

となり、結果として、 $xy$ 座標系で観測していた応力テンソル  $\boldsymbol{\sigma}^T$  を  $x'y'$ 座標系で観測し  $\boldsymbol{\sigma}'^T$  は、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}^T \quad (8)$$

となることがわかる。応力テンソルについては、別途、 $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}'^T = \boldsymbol{\sigma}'$  (すなわち、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$ )

であることが証明できるので、上式は

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T \quad (9)$$

← テンソルの座標変換

となる。(ただし、応力テンソルの対称性を用いるまでもなく、式(8)の両辺を転置すれば式(9)を得ることは自明だが、どうせ応力テンソルの対称性をこれ以降使用するのので、先に導入しただけ)。

では、実際に応力テンソルに各成分を入れて計算してみる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \sigma_x + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned}$$

整理すると、

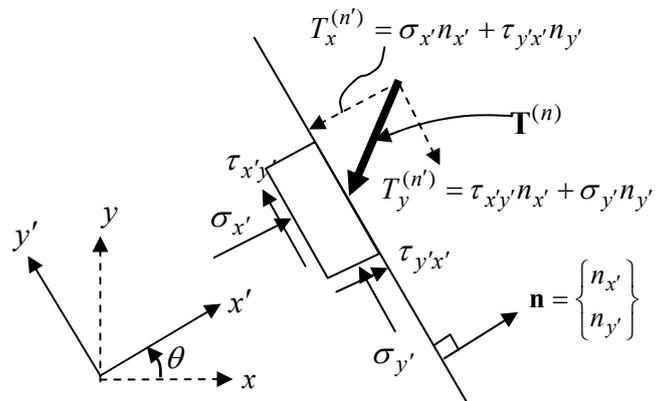
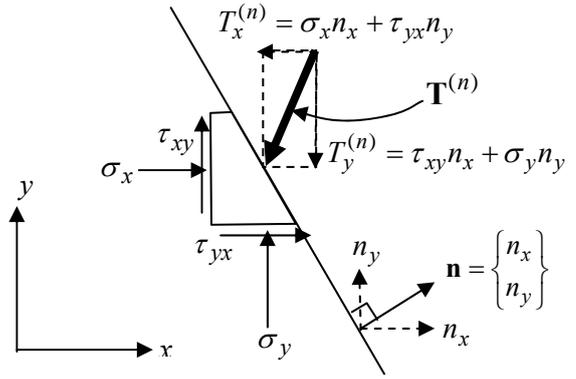
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (11)$$

同様に計算すると、

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (12)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (13)$$

となり角度  $\theta$  だけ回転した座標系で観測した応力テンソルの成分が求められる。



同じ応力ベクトルを角度  $\theta$  だけ回転した座標で観測する  
(物理的には応力ベクトルは何も変わらない)

### (7) 座標変換とモールの応力円

式(11)を変形すると、

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

この式の両辺を2乗すると

$$\left( \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta \quad (14)$$

式(13)の両辺を2乗すると、

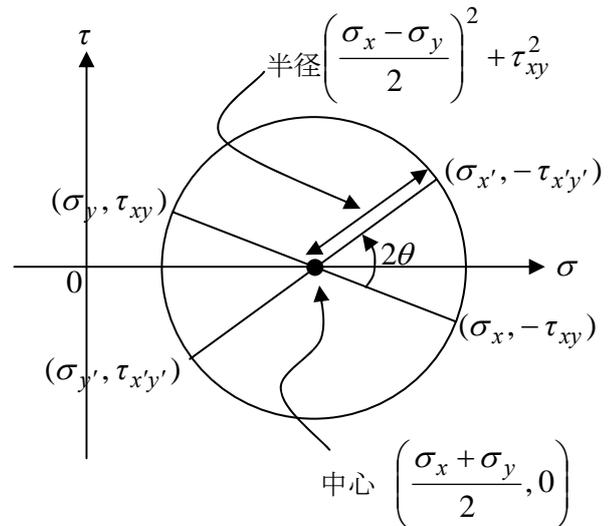
$$\tau_{x'y'}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta \quad (15)$$

式(14)と(15)を加えると、

$$\left( \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

結局、座標変換前後の応力状態は、常に右図のような円周上の点で表すことができる。円の中心と半径は、座標変換前の応力状態から決定される。

この円を、**モールの応力円**という。



### (8) 主応力と応力テンソルの固有値

物体内で応力ベクトルの作用面を回転してゆくと、ある面（とその直交する面）に作用する応力ベクトルは垂直成分しか持たず平行成分がない場合が必ず存在する。すなわち、その面にはたらくせん断応力はゼロで、垂直応力しか働いていない。この時の垂直応力を主応力と呼ぶ。また、主応力の働く面を主応力面と呼ぶ。ある主応力面に直交する面も必ず主応力面になっており、それぞれの面に働く主応力の大きい方を最大主応力と呼び、小さい方を最小主応力と呼ぶ。（最大、最小とわざわざ付けるのは、座標変換して得られる垂直応力の中でも、それら主応力が必ず最大値および最小値になるからである。）

では、主応力を実際に求めてみる。主応力面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすれば、その面での応力ベクトルは垂直成分しか持たないので、 $\mathbf{n}$  のスカラー倍  $\lambda \mathbf{n}$  となる。すなわち、

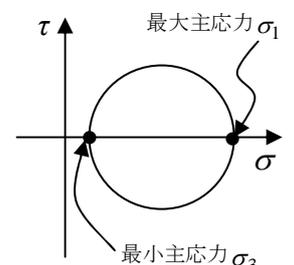
$$\mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \text{ より、 } \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} - \lambda \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ よって、 } (\boldsymbol{\sigma}^T - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ この式において、 } \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ 以外の解を}$$

持つためには、 $|\boldsymbol{\sigma}^T - \lambda \mathbf{I}| = 0$  でなければならない。よって、

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = (\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy}^2 = 0 \text{ となり、この } \lambda \text{ に関する2次方程式を解けば、}$$

$$\lambda = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

← 言うまでもなく、モールの円の両端

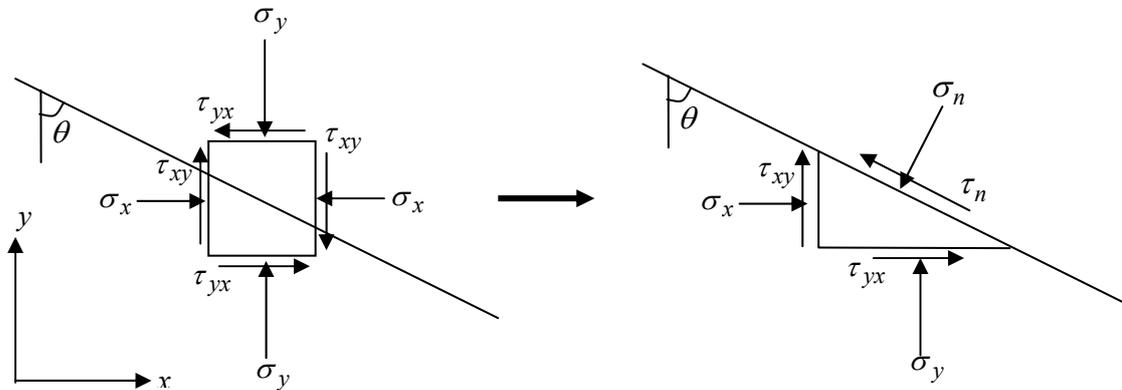


となり、 $\lambda$  の大きい方と小さい方が、それぞれ最大および最小主応力である。

以上の計算は、結局、応力テンソルの固有値を求めていることと同じである。

### (9) 力の釣り合いによる応力の座標変換の解法

この節は蛇足であると思われるが、念のため、微小土塊に働く応力ベクトルの成分から、任意の面に働く応力ベクトルの「面に垂直な成分と面に平行な成分」を幾何学的に求める方法について説明する。この方法は、いろいろな教科書で使われているが、「応力を任意の面に対して座標変換して観測する」という概念が無くても、何となくわかったような気になるため、少々危険な論法であるので注意が必要である。



微小な四角形の領域を考えた時に、設定した座標系に対して、各面に働く応力ベクトルの成分（すなわち、各垂直応力とせん断応力）が上図（左）のようになっているとする。その時、鉛直線から $\theta$ 傾いた面に働く応力ベクトルの面に対しての垂直成分と平行成分の大きさを求めたい。

そのため、上図（右）のように、角度 $\theta$ 傾いた任意の面で切断した、微小三角形領域の土塊の力の釣り合いを考える。実際は、各面に応力ベクトルが働いているが、図ではそれぞれの面での応力ベクトルの成分（垂直成分と平行成分）だけを示している。

それぞれの成分の大きさは単位面積当たりの力であるので、力の釣り合いを考えるためには、各面の面積（奥行きは長さ1としておく）をあらかじめ決めておく。

ここでは、 $\sigma_x$ が働く面の面積を $\Delta y$ とし、 $\sigma_y$ が働く面の面積を $\Delta x$ とすると、 $\sigma_n$ が働く面の面積は

$$\frac{\Delta y}{\cos \theta} \left( = \frac{\Delta x}{\sin \theta} \right) \text{となる。}$$

したがって、図より $x$ 方向の力の釣り合いは、

$$\sigma_x \cdot \Delta y + \tau_{xy} \cdot \Delta x - \sigma_n \cos \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} - \tau_n \sin \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} = 0 \quad (16)$$

同様に、 $y$ 方向の力の釣り合いは、

$$\sigma_y \cdot \Delta x + \tau_{xy} \cdot \Delta y - \sigma_n \sin \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} + \tau_n \cos \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} = 0 \quad (17)$$

$\Delta x / \Delta y = \tan \theta$ を用いて、式(16)と(17)を整理すると、それぞれ以下ようになる。

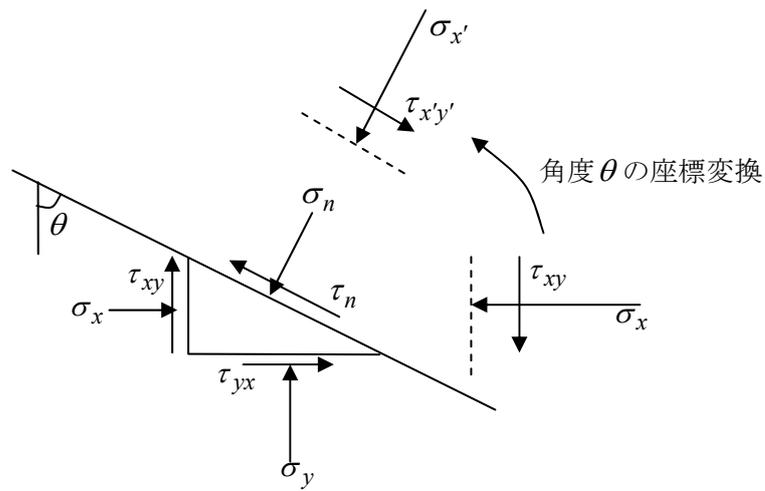
$$\sigma_n + \tau_n \tan \theta = \sigma_x + \tau_{xy} \tan \theta$$

$$\sigma_n \tan \theta - \tau_n = \sigma_y \tan \theta + \tau_{xy}$$

結局、 $\sigma_n$ と $\tau_n$ は、

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_n &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

となる。



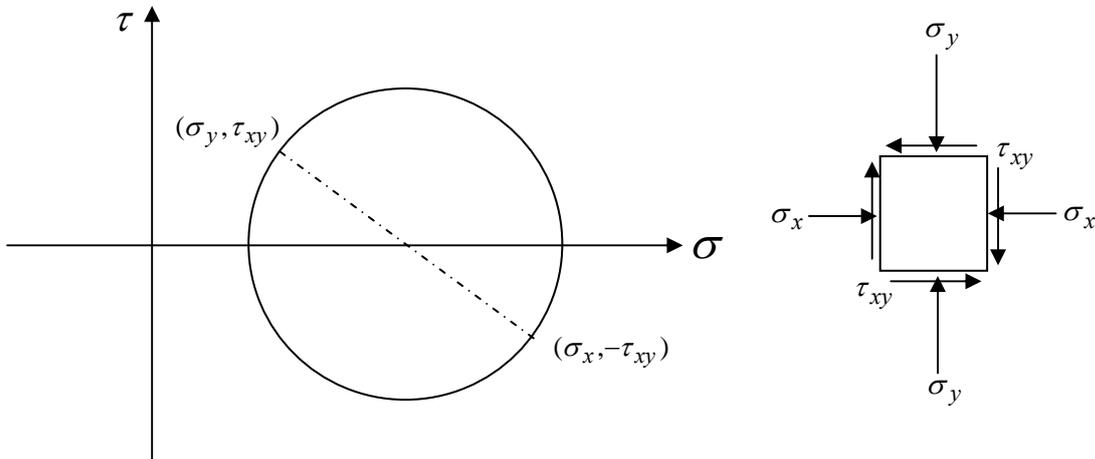
これは、上のように角度 $\theta$ の座標変換で求めた $\sigma_{x'}$ と $\tau_{x'y'}$ と結果として同じになる。ただし、 $\tau_n$ は座標変換の場合の $\tau_{x'y'}$ とは向きが逆に定義されていたので、符号は逆になっている。

このように、せん断応力の働く向きは、自分がどちらに決めたが重要なので、せん断応力を求める際には、その大きさだけでなく、向きにも常に注意しなければならない。

【モールの応力円】

(1) モールの応力円を使う上での3つの約束

- ① 垂直応力は圧縮を正とし、 $\sigma$ 軸の右側を正の方向とする。
  - ② 反時計まわりのモーメントを起こさせるせん断応力 $\tau$ の組を正とする。
  - ③ 物体内で着目する面が、 $\theta$ だけ回転すると、モールの応力円上では $2\theta$ 回転する。
- ①と②は物理的な実際の作用面とモールの応力円上との回転の方向を一致させるために都合の良い約束である。②は場合によっては、座標変換の時に決めたせん断応力の符号とは必ずしも一致しない(むしろ逆の場合も多い)ので注意する。
- ③はモールの応力円の誘導した過程(座標変換の式も同様)で、三角関数の倍角公式により、物理的な実際の作用面での角度 $\theta$ が、計算上は $2\theta$ になってしまったことからわかる。
- これを利用して用極法ができています。

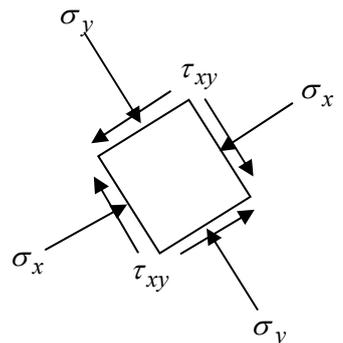


例えば、上図は右側の応力状態 ( $\sigma_x > \sigma_y$  の場合) をモールの応力円で描いたものである。座標変換の場合に約束したせん断応力の符号の決め方では、図の  $x$  面 ( $x$  軸に垂直な面) に作用するせん断応力は下向きが正(図に記した方向)であるが、モールの応力円の約束ではその方向は時計回りにモーメントを発生させる向きなので負となる。したがって、モールの応力円上では、 $\sigma_x$  に対するせん断応力は  $-\tau_{xy}$  となっている。

また、モールの応力円は、ただ一組の直交する2つの面の応力状態がわかれば、そこから180度回転したあらゆる面に作用する応力状態がわかる。要は、座標変換のすぐれた図式解法である。

(2) 用極法

上図のモールの応力円を描いている時点では、物理的な作用面の方向は全く関係ない。すなわち、右のような応力状態であっても、描かれるモールの応力円は全く変わらない。しかし、モールの応力円の図上に補助線を引いて、極(Pole)を決めるだけで、モールの応力円の図上で、物理的な作用面の方向の議論ができるようになる。

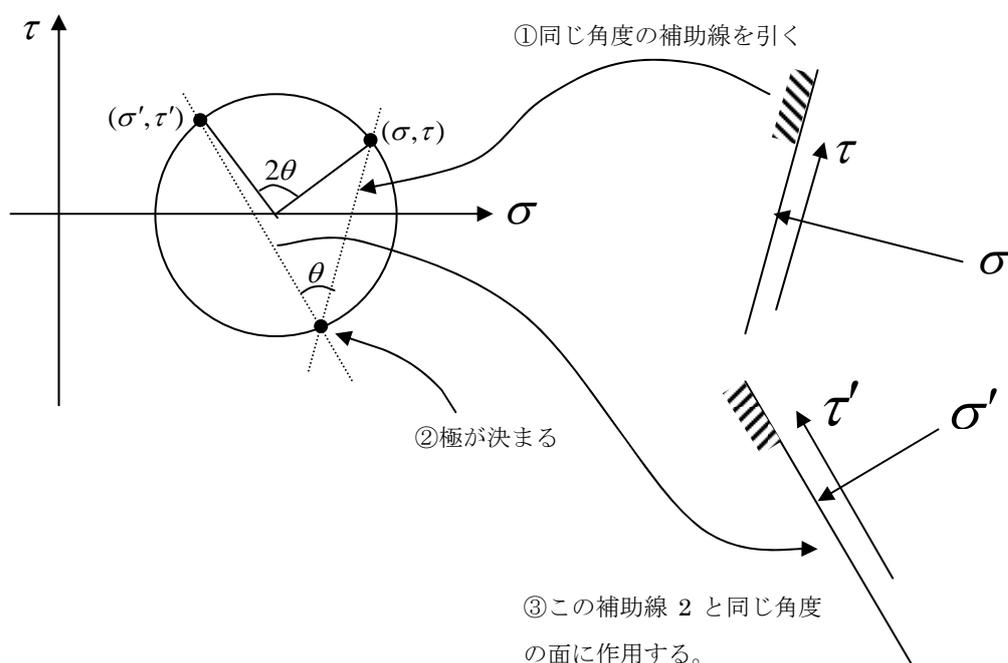


### 極の決め方

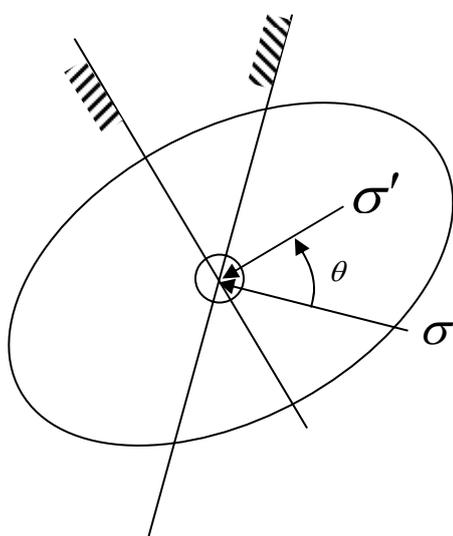
- ① ある応力の組  $(\sigma, \tau)$  に対して、その応力が作用している面の方向に合わせてモールの応力円の図上に補助線を引く。
- ② その補助線とモールの応力円上の交点を極とする。なお、補助線とモールの応力円が交差している場合（普通の場合）は、元の応力点と別の点が極となる。また、補助線とモールの応力円が接している場合は、その接点自身が極となる。

### 極の使い方

- ③ モールの応力円上のある応力点  $(\sigma', \tau')$  が作用している面の方向は、極からその応力点に引いた補助線 2 の方向である。

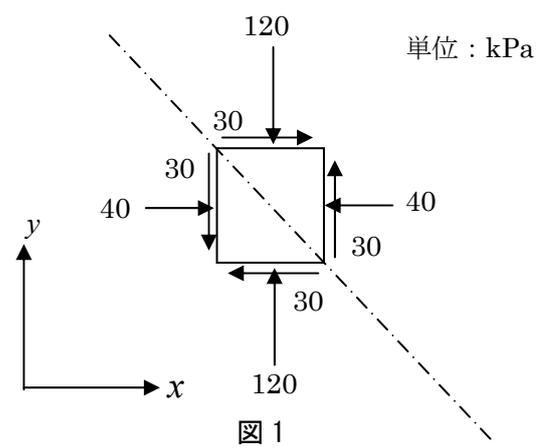


上の右の図のように描くと、 $(\sigma, \tau)$  と  $(\sigma', \tau')$  の 2 組の応力が作用している 2 つの面の関係がわかりづらいが、実は物体内の同じ位置において、応力が作用する面を回転させているだけであることに注意する。



(3) 応力の座標変換とモールの応力円の例題

**【1】座標変換を用いて答えよ。**  
 ①図1のように、45度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力を求めよ。  
 (せん断応力は、向きを図示して示しなさい)  
 ②最大主応力と最小主応力の大きさを  
 応力テンソルの固有値を用いて求めよ。



ポイント：座標変換の式を用いるときは、各応力の成分の符号を整理する。

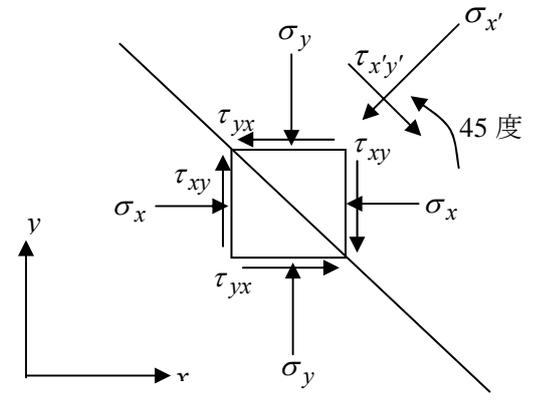
**【①の解答と解説】**

図2のxy座標系を設定した場合、各応力の成分は、

$$\sigma_x = 40, \quad \sigma_y = 120, \quad \tau_{xy} = -30 \text{ となる。}$$

45度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力とは、同じく図2のように、 $\sigma_x$ から反時計まわりに45度回転した

$\sigma_{x'}$ と $\tau_{x'y'}$ である。(よって、 $\theta = +45^\circ$ )



したがって、(この座標系で考えた場合の)座標変換の式

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

にそれぞれの値を代入して、

$$\sigma_{x'} = \frac{40+120}{2} + \frac{40-120}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + (-30) \sin(2 \times 45^\circ) = 50$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{40-120}{2} \sin(2 \times 45^\circ) + (-30) \cos(2 \times 45^\circ) = 40$$

以上のように求められたので、垂直応力とせん断応力(特にせん断応力)の向きに注意\*して、図3のように答える。

(※図1を見れば、横より上下に作用する応力の方が大きいので、45度傾いた面に作用するせん断応力の向きが斜め下向きになることは直感的に考えてもわかるはず)

**【②の解答と解説】**

応力テンソルは、図2のような座標系を設定すれば、①で整理したのと同様に各成分が次式のように求められる。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -30 \\ -30 & 120 \end{pmatrix}$$

主応力：応力(ベクトル)が作用する面をいろいろ回転して見たときに、せん断応力が全く作用せず、垂直応力のみが作用する面が必ずあり、その時の垂直応力のことを主応力と言う

図2

図3

したがって、主応力を求めるには、応力テンソルを対角化すればよい。具体的には、固有値と固有ベクトルを求めるということだが、主応力の値だけなら、固有値を求めれば良い。よって、

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 - \lambda & -30 \\ -30 & 120 - \lambda \end{vmatrix} = (40 - \lambda)(120 - \lambda) - (-30)^2$$

$$= \lambda^2 - 160\lambda + 3900 = (\lambda - 30)(\lambda - 130) = 0 \quad \text{より,} \quad \lambda = 30, 130$$

したがって、最大主応力は 130(kPa)、最小主応力は 30(kPa)となる。

※主応力と応力テンソルの固有値については、[配付資料 No. 10 の\(8\)](#)を参照

【2】モールの応力円を用いて答えよ。

(用極法を用いずに解きなさい)

①図1のように、45度傾いた面に作用する

垂直応力とせん断応力を求めよ。

(せん断応力は、向きを図示して示しなさい)

②最大主応力の大きさと作用する面の方向を求めよ (方向は図示せよ)

### 【①の解答と解説】

始めに、図1の2組の応力の組み合わせが、モールの応力円を描く上で、どの点にプロットされるのかを、特にせん断応力の符号に注意して考える。

すなわち、垂直応力が 40(kPa)作用する面のせん断応力は、図の四角形の土要素を反時計回りに回そうとする方向であるので、正となり、30(kPa)となる。したがって、図4において、垂直応力が 40(kPa)作用する鉛直面における応力状態は点Aで表される。一方、それと直交する水平面には、垂直応力 120(kPa)と土要素を時計回りに回転させようとするせん断応力(すなわち、図4では負)が作用するので、図1での水平面の応力状態は図4で点Bで表される。

結局、モールの応力円は、点A、点Bを結ぶ線を直径とする円となる。さて、問題の図1に示す45度傾いた面に作用する応力状態であるが、これは図2から、点Aの応力状態が45度、反時計回りに回転した場合の応力状態である。図2での物理的座標軸の回転の方向は、図4のモールの応力円の図上の回転の方向と一致するから、図4のモールの応力円では、45度の2倍の90度だけ点Aから回転した点Cの応力状態が、求めるべきものとなる。したがって、三角形の幾何学的な関係から、点Cの座標は(50, -40)となる。せん断応力は負であるので、モールの応力円の作図の約束より、土要素を時計回りに回す方向に作用することがわかる。すなわち、図示すると、図5のようになる。

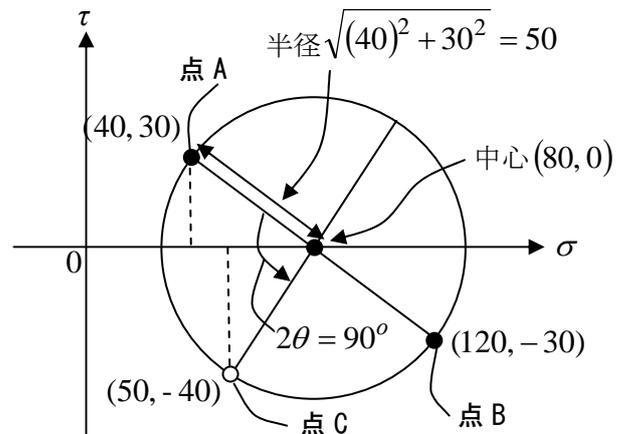


図4

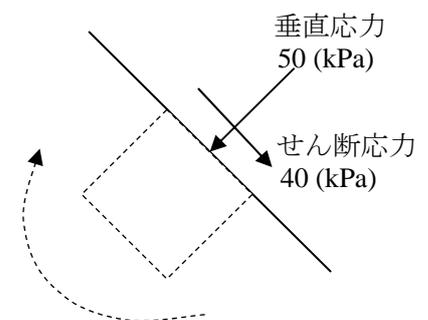


図5

**【②の解答と解説】**

主応力は、座標軸を回転させて応力状態を観測した時に、せん断応力がゼロとなる場合の垂直応力であるから、モールの応力円の図6上では、2つの○で表した点となる。円の半径が50であることから、最大主応力と最小主応力は、それぞれ中心の座標(80,0)から半径を足したものと引いたものとなり、

最大主応力 130(kPa)

最小主応力 30(kPa)

となる。

では、主応力が作用する面の方向であるが、

点Aの応力状態が作用する面、すなわち鉛直面を基準

に考えると、図5において、点Aから最小主応力の点まで、中心角にして反時計回りに

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right)$$

となるので、実際には

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = 18.4^\circ$$

鉛直面から反時計回りに傾いた面に最小主応力は作用することになる。

一方、最大主応力の点は、点Bから中心角にして反時計回りに $\alpha$ だけ回転した場所で表されるので、点Bの応力状態が作用する面、すなわち水平面から反時計回りに、

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = 18.4^\circ$$

だけ傾いた面に作用することになる。図示すると、図7のようになる。

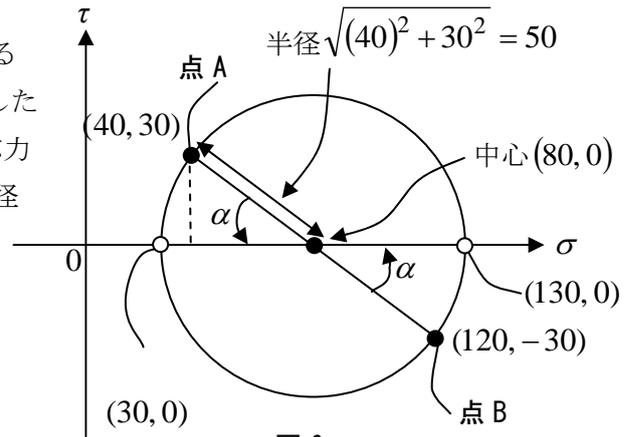


図6

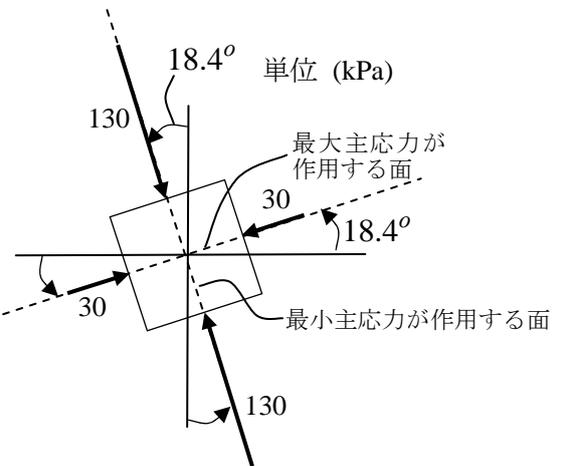


図7

**注意：**

図1と図7の関係はどちらの応力状態であっても、観測している座標軸が異なるために、表し方が異なるだけである。そのため、土要素がうける変形は全く同じになる。すなわち、図8のようにもともと円型の土要素に、図1のような応力状態が作用した場合と、図7のように主応力が作用した場合では、土要素の円は、斜線部の楕円のように全く同じ変形となる。(ただし、これはイメージ図) 逆に、図8の左の図を見ただけで、大体の変形のイメージ(斜線の楕円の形)が思い浮かべられれば、主応力の作用する方向を間違えることはまず無い。

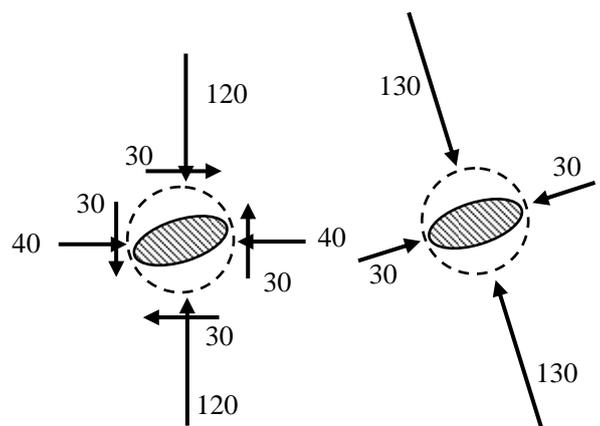


図8

【3】モールの応力円の用極法を用いて答えよ。

- ①図のように、45度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力を求めよ。  
(せん断応力は、向きを図示して示しなさい)
- ②最大主応力の作用する面の方向を求めよ  
(方向は図示せよ)

【①の解答と解説】

モールの応力円を描くまでは(2)①と同じ。

極の求め方は、すでに明らかになっている応力状態を基準にして、それらが作用している面を実際にモールの応力円の図上に描いてしまう。ここでは、点Aと点Bの応力状態が明らかである。点Aの応力状態が作用する面は鉛直面であるので、図9に示すように、それを図上に

描き、その面と応力円との交点を「極」と定める。(これは、点Bから、その作用面(水平面)を描いても同じ「極」を定めることができる。要するに、「極」とは、モールの応力円上ですべての作用面が交わる唯一の点である。)

極が定まれば、問題の「45度傾いた面」を実際に、極を通るように図上に描けば、その面とモールの応力が交わる極以外のもう一つの点、その面に作用する応力状態を表す点となる。

したがって、C点がその求める点となる。

実は、点Cの具体的な座標値を図9から求めるのは若干面倒くさいが、幾何学的な関係だけから、 $(\sigma, \tau) = (50, -40)$ と求めることができる。したがって、答えは図5と全く同様となる。

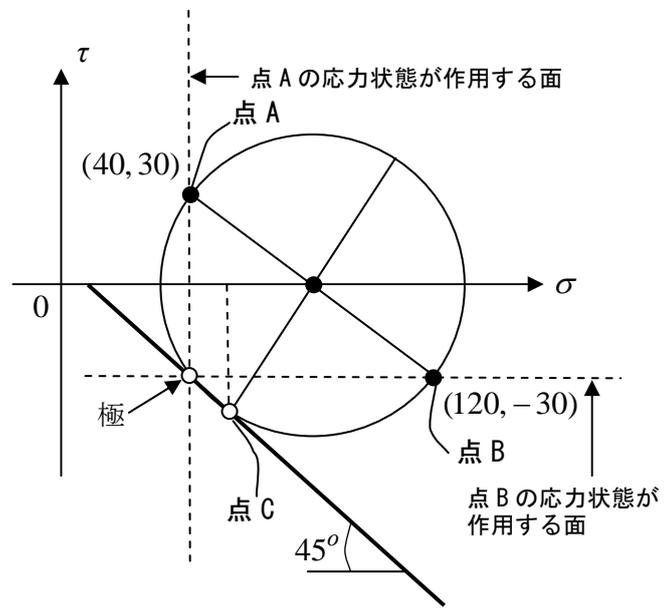


図9

【②の解答と解説】

すでに極が求められているので、最大主応力の作用する面を示すのは、非常に簡単であり、図10に示すように、極から最大主応力を示す点を結んだ線が最大主応力が作用する面となる。また、最小主応力が作用する面も同様に、極から最小主応力を示す点に線を引くだけである。

具体的な角度は、幾何学的な関係より、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{90}\right) = 18.4^\circ$$

となり、最大主応力が作用する面は、水平面

から18.4度反時計回りに傾いた面であることがわかる。一方、最小主応力が作用する面は鉛直面から反時計回りに18.4度だけ傾いた面であることがわかる。(図7も参照のこと)

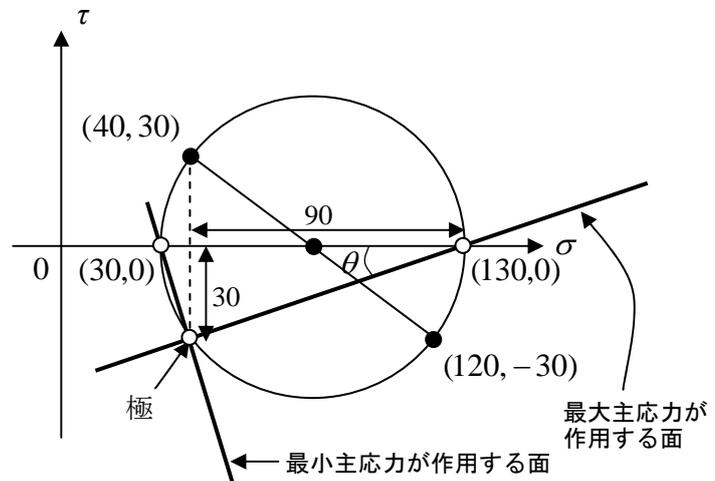
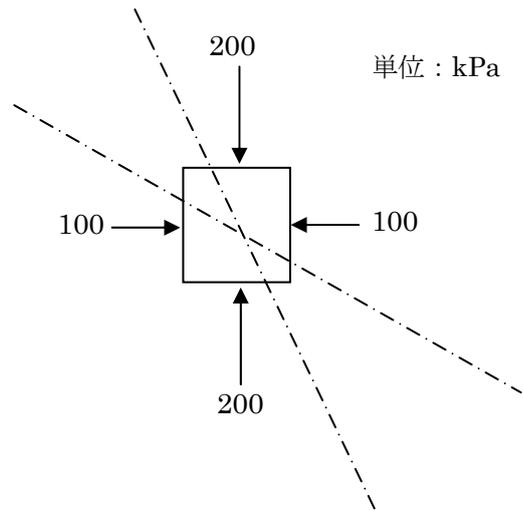


図10

まとめ：当然のことながら、どの解法でも同じ結果を得ることが出来るが、それぞれに特長がある。例えば、用極法は非常に優れた図式解法であり、応力の作用面の方向が一目瞭然でわかるが、モールの応力円上の具体的な座標値や、傾きの角度を計算するのは若干面倒くさいこともある。数字をズバリ出すなら、座標変換の式を用いた方が正確で早いことも多い。これらの特長を抑えて、自在に使い分けることができれば理想的である。

【4】

右の図の応力状態があったとする。  
 図のように 30 度と 60 度傾いた面に働く、  
 垂直応力とせん断応力の大きさと向きを  
 下記の方法で求めよ。



- ①座標変換を用いる
- ②モールの応力円（用極法なし）を用いる
- ③モールの応力円（用極法）を用いる

【解答と解説】

ポイント：主応力が与えられている時の問題

①座標変換

求める面は、最小主応力が作用する鉛直面からそれぞれ 30 度と 60 度傾いているので、

30 度の面：

$$\sigma = \frac{100+200}{2} + \frac{100-200}{2} \cos 60^\circ = 150 - 25 = 125$$

$$\tau = -\frac{100-200}{2} \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}$$

60 度の面：

$$\sigma = \frac{100+200}{2} + \frac{100-200}{2} \cos 120^\circ = 150 + 25 = 175$$

$$\tau = -\frac{100-200}{2} \sin 120^\circ = 25\sqrt{3}$$

となり、せん断応力の向きは、座標軸の定義より  
 それぞれ図 11 のようになる。

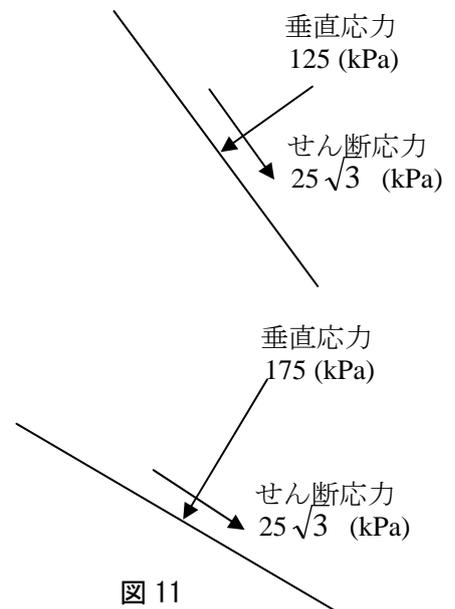


図 11

②モールの応力円（用極法なし）

モールの応力円は、図 12 のようになる  
 求める面は、最小主応力が作用する  
 鉛直面からそれぞれ 30 度と 60 度反  
 時計回りに傾いているので、モールの  
 応力円上では最小主応力を示す点  
 から、60 度と 120 度同じく反時計回  
 りに回転した点が、それぞれの面に  
 作用する応力状態を示すことになる。

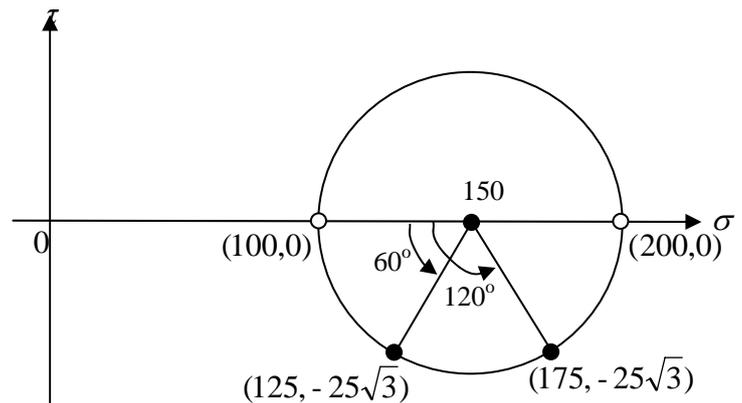


図 12

結局，図 12 の幾何学的な関係から，

$$30 \text{ 度の面} : (\sigma, \tau) = (125, -25\sqrt{3})$$

$$60 \text{ 度の面} : (\sigma, \tau) = (175, -25\sqrt{3})$$

となり，モールの応力円上の座標でせん断応力が負になる場合は，時計回りに土要素を回転させるようなせん断応力の向きとなるので，結果は，前ページ図 11 と同様になる。

### ③モールの応力円（用極法）

主応力が与えられている場合のモールの応力円において極を定める。

図 13 に示すように，最小主応力を示す点から，最小主応力が作用する面（ここでは鉛直面）を描くと，それは応力円の接線となってしまふ。したがって，極は最小主応力を示す点そのものである。最大主応力を示す点から，その作用面（ここでは水平面）を描けば，やはり極は最小主応力を示す点であることが示される。

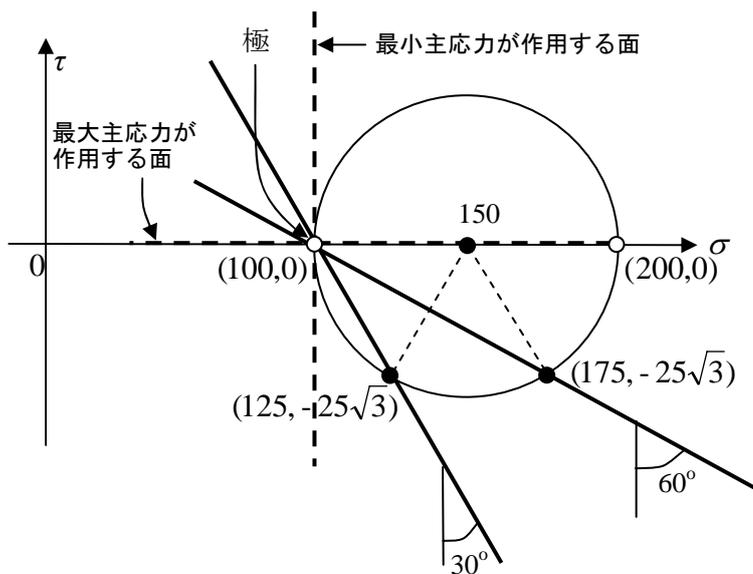


図 13

この極を通り，鉛直面からそれぞれ 30 度と 60 度反時計回りに傾いた面を描き，それらとモールの応力円との交点が，それぞれの面に作用する応力状態を示すことになる。

したがって，図 13 の幾何学的な関係を用いて，

$$30 \text{ 度の面} : (\sigma, \tau) = (125, -25\sqrt{3})$$

$$60 \text{ 度の面} : (\sigma, \tau) = (175, -25\sqrt{3})$$

であることがわかる。結果として，②と同様に前ページ図 11 と同様の結果を得る。

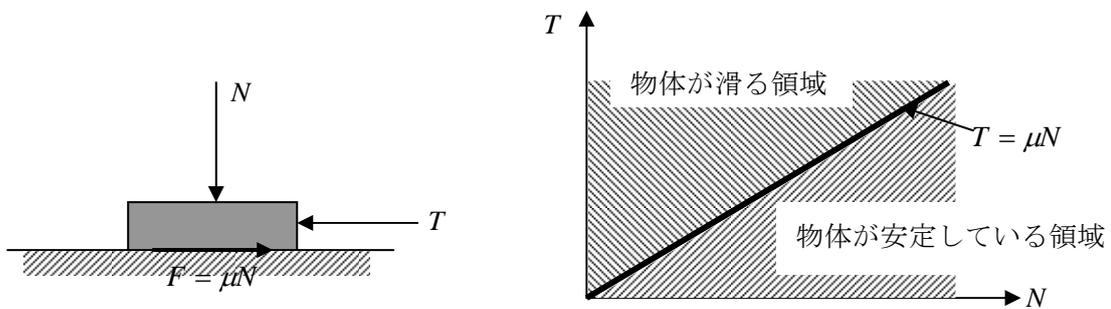
【土の破壊基準 (垂直応力とせん断応力の重要性)】

応力の座標変換を説明した時に、応力ベクトルは作用している面に対して垂直成分 (垂直応力) と平行成分 (せん断応力) を知ることが重要であると述べた。なぜ、それが重要なのかを土の破壊特性と関連づけて説明する。

(1) 摩擦性材料としての土

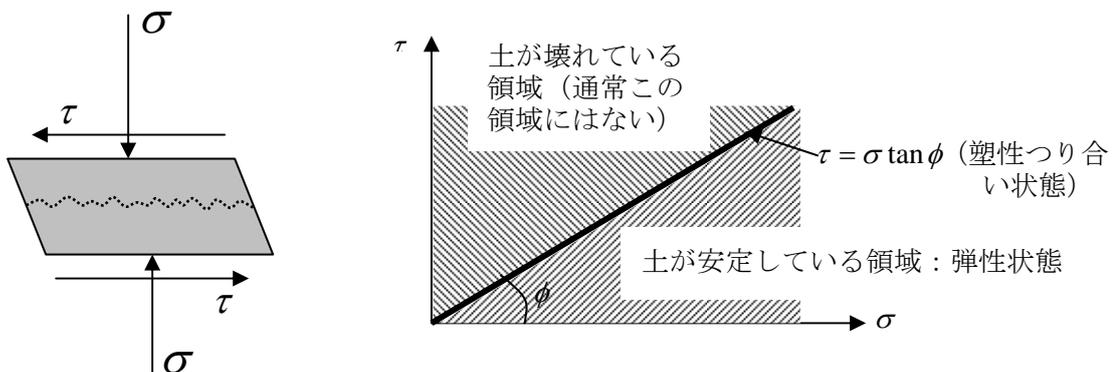
復習: 摩擦力

摩擦力  $F$  は、垂直抗力  $N$  に比例して大きくなる。摩擦係数  $\mu$  を用いれば  $F = \mu N$  と表される。下図のように摩擦のある水平な台の上に、物体が置いてあり、その物体を上から  $N$  の力で押しつけているとする。今、横から  $T$  という水平力を与えてこの物体を滑らそうとするとき、 $T \geq F$  となったときに、物体は台上をすべり始める。すなわち、右のグラフ上で考えると、摩擦力を表す直線の下側では物体は安定しており、上側では物体は滑ることになる。



以上の摩擦力の概念を、土に当てはめてみる。

垂直応力  $\sigma$  だけを考えれば、 $\sigma$  をいくら大きくしても土は通常は壊れることはないが、せん断応力  $\tau$  が加わることによって、土はせん断変形し始める。土にも「摩擦則」が成立し、垂直応力  $\sigma$  に比例したせん断抵抗力  $r$  が発揮される。物体の外部から加わる外力の状態により、物体内部に発生するせん断応力  $\tau$  が、このせん断抵抗力  $r$  と同じ大きさに達すると、せん断変形は急激に大きくなり、やがて下図のように土は破壊する。破壊が目に見えて観察できる場合の典型例は、図のように不連続面が発生する場合であり、この不連続面のことを「すべり面」と呼ぶ。



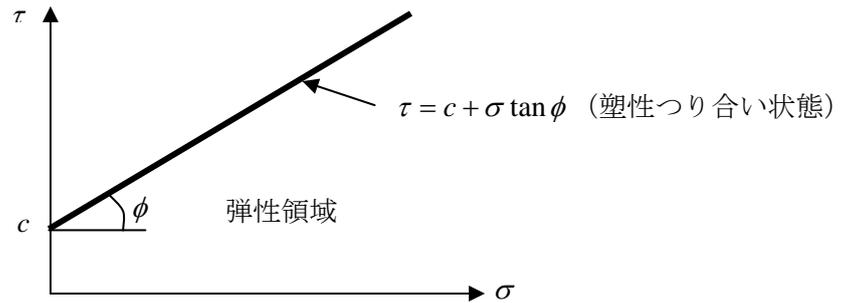
土の摩擦則では、比例定数である摩擦係数は用いず、せん断抵抗角 (内部摩擦角)  $\phi$  を用いて表す。

## (2) クーロン (Coulomb) の破壊基準

クーロンは土の垂直応力とせん断応力には右図のような関係が成り立つと仮定した。

$\tau < c + \sigma \tan \phi$  の領域：土は弾性領域（可逆的な変形をする領域）にあり、変形は小さい。

$\tau = c + \sigma \tan \phi$  の状態：土は塑性つり合い状態（非可逆的な変形をする状態）になり、大きな変形をしてやがて壊れる。



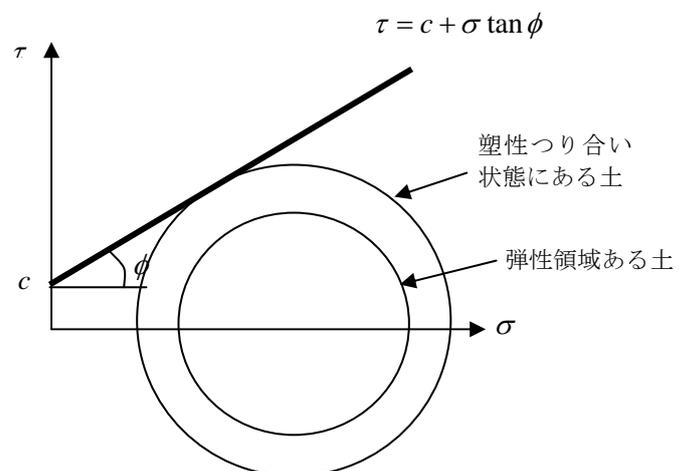
**粘着力  $c$ ：**粒状体である土は、つぶつぶ同士を拘束する圧力（拘束圧）がなければバラバラになってしまう。そのため、(1)の図で示したように $\sigma$ がゼロならば $\tau$ もゼロとなる。しかし、実際の土は、場合によっては拘束圧がゼロの状態でも幾分かのせん断抵抗応力を持つ。これを粘着力 $c$ 呼ぶ。呼び名は「粘着力」だが、次元（単位）は応力なので注意する。

**粘着力の原因：**粘性土の場合には、化学的な作用によりセメンテーションが発達して、土粒子同士がくっつき粘着力が発生する。過圧密粘土の場合にも粘着力が発揮される（理由はあとで）。砂の場合、密詰め砂では砂粒子間の結合力が大きいため粘着力が発揮される（これは、過圧密粘土が粘着力を発揮するのと同じ理由）。また、砂や粘土に限らず、不飽和土の場合には、サクションの作用により粘着力が発生する。

**せん断抵抗角（内部摩擦角） $\phi$ ：**垂直応力が増えればせん断応力も大きくなるという「摩擦モデル」は、砂の場合では粒径の大きいザラザラの砂粒を想像すれば比較的イメージしやすい。しかし、非常に土粒子が小さい粘土でも、「摩擦モデル」を同じようにイメージできるだろうか？  
実は、粘土の場合には、同じように摩擦則が成り立っていても、砂とはかなり異なるメカニズムでせん断応力が増加している。粘土は、垂直応力が加えられると圧密して間隙比が小さくなる。そのため、垂直応力が大きいほど、間隙比は小さくなり、せん断抵抗力（せん断強度）は大きくなっていく。粘土の「せん断強度」は間隙比と1対1の関係にある（非常に重要）。したがって、粘土の場合、クーロンの破壊基準は1本の直線で表されているが、その線上のひとつひとつの点は、実は間隙比の異なる粘土のそれぞれのせん断強度がプロットされていることになる。

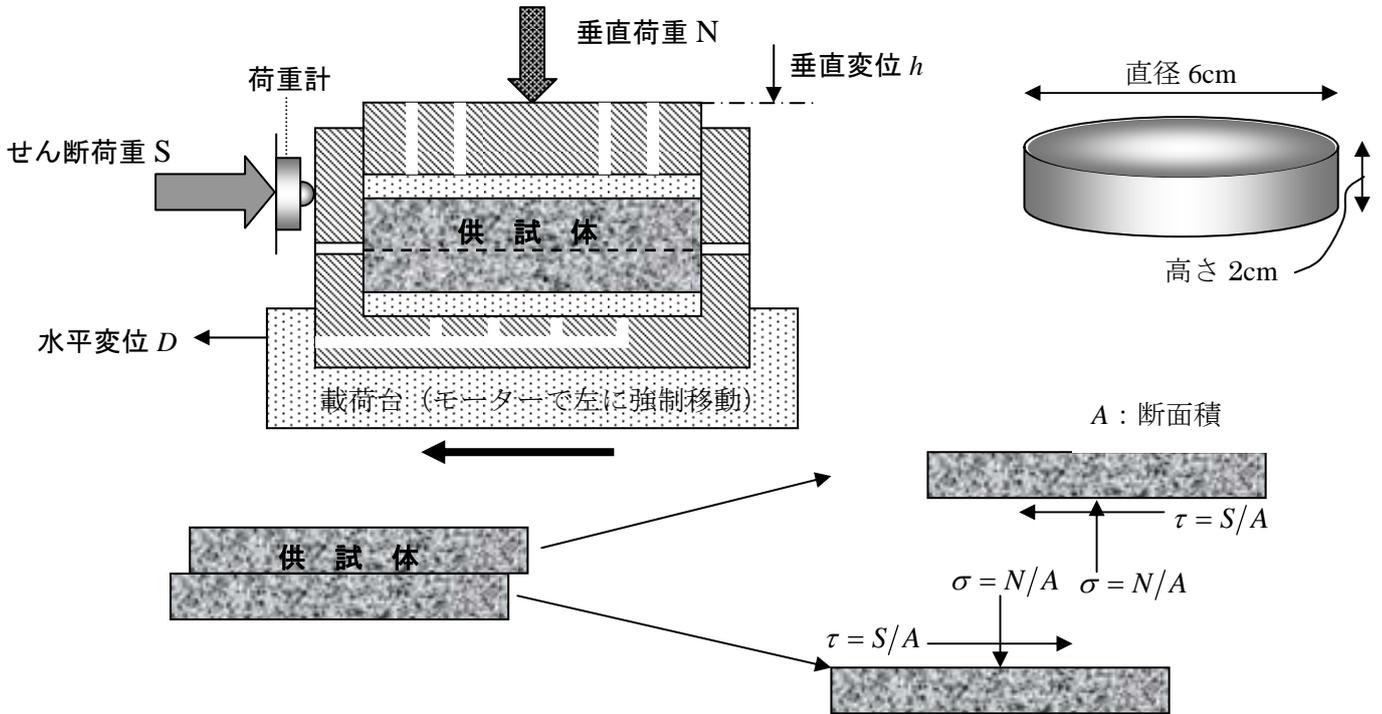
## (3) モールの応力円と破壊基準の関係

モールの応力円は物体内のあらゆる作用面にたいする応力状態（垂直応力とせん断応力の組合せ）をプロットしたものであった。したがって、図の外側の円のように、モールの応力円が破壊基準の直線に接していたら、その時点でその接点の応力状態は破壊状態（塑性つり合い状態）にあることになる。別の作用面での応力状態が、破壊基準の直線よりも下回っていても、作用面を回転させて見ると、実は破壊基準に達していると言う場合が生じる。図の内側の円のように、モールの応力円を描いてみて、破壊基準に接しなければ、あらゆる作用面に対してその土は弾性領域にあることを示している。



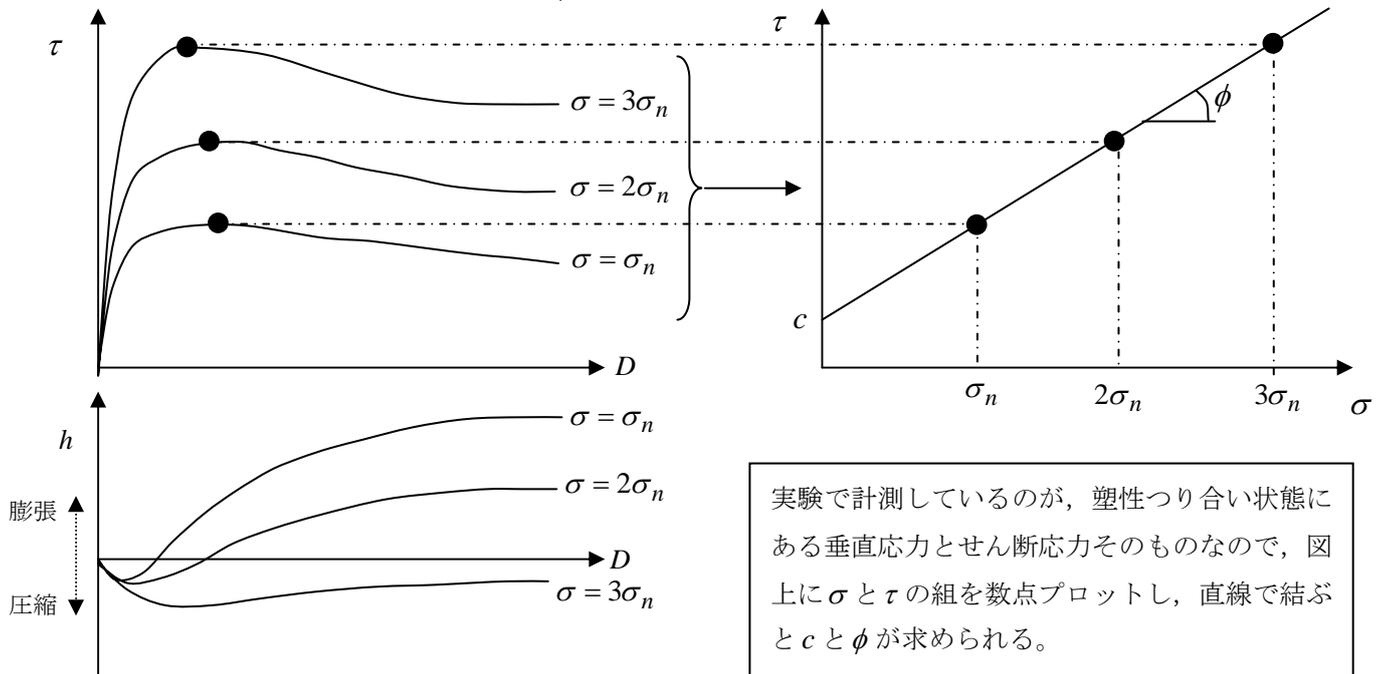
【土のせん断強度を測定する試験(1) : 一面せん断試験と一軸圧縮試験】

(1) 一面せん断試験



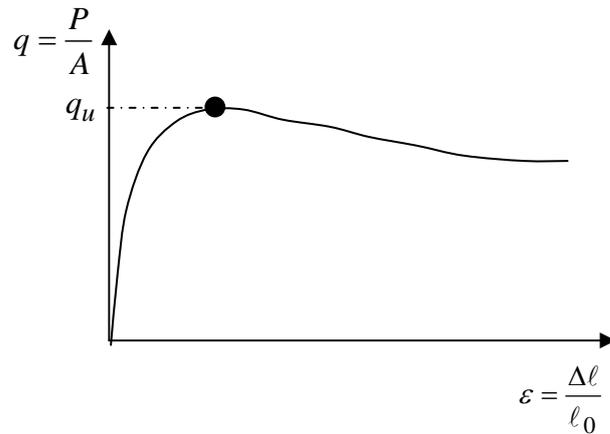
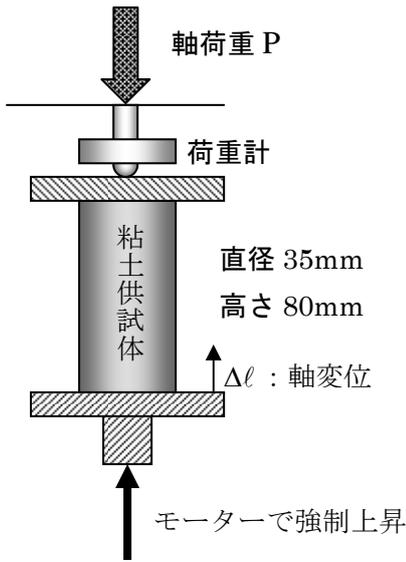
試験方法 :

- ① 垂直荷重  $N$  を載荷する。粘土の場合は十分圧密が終了してから②に進む。砂の場合は、瞬時に圧密は終わるので、すぐに②に進む。
- ② 垂直荷重  $N$  を載荷したまま、せん断箱の下側を一定の速度でずらしてゆく (水平変位 1cm 程度まで)。
- ③ 水平変位～せん断応力の関係、水平変位～垂直変位の関係、の2つを記録してグラフを描く。
- ④ 何種類か垂直荷重を変えて、①～③の実験を行う。
- ⑤ それぞれの実験の垂直荷重  $N$  から求められる  $\sigma$  と③で記録されるせん断荷重の最大値  $S_{\max}$  から求められる  $\tau_{\max}$  の2つの応力を  $\sigma \sim \tau$  図にプロットする。
- ⑥ 粘着力  $c$  とせん断抵抗角 (内部摩擦角)  $\phi$  を求める。



実験で計測しているのが、塑性つり合い状態にある垂直応力とせん断応力そのものなので、図上に  $\sigma$  と  $\tau$  の組を数点プロットし、直線で結ぶと  $c$  と  $\phi$  が求められる。

(2) 一軸圧縮試験

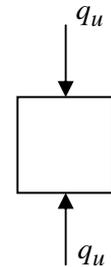


試験方法：

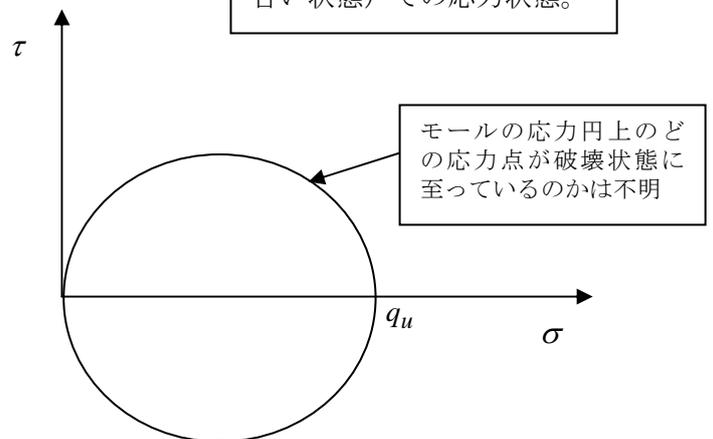
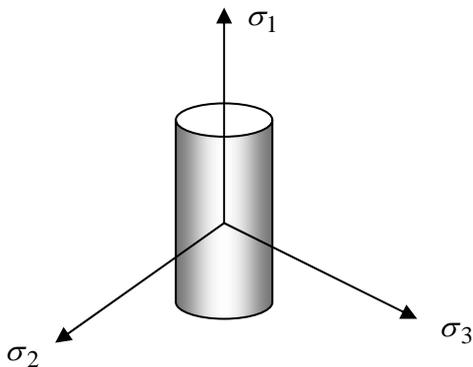
- ① 載荷台を一定の速度で上昇させてゆく（垂直変位 1.5cm 程度まで）。
- ② 軸変位から軸ひずみを計算し，軸荷重から軸応力を計算し，軸応力と軸ひずみの関係（応力～ひずみ関係）をグラフに描く。
- ③ 軸応力の最大値を一軸圧縮強度  $q_u$  とする。

特徴：

- ① 要素試験である。要素：供試体の中の応力やひずみは一様
- ② 鉛直方向の主応力のみを載荷している。
- ③ 一軸圧縮強度  $q_u$  のみ計測でき， $c$  や  $\phi$  はわからない。
- ④ 非排水条件のせん断しかできない。



一軸圧縮試験でのピーク荷重時（破壊状態・塑性つり合い状態）での応力状態。

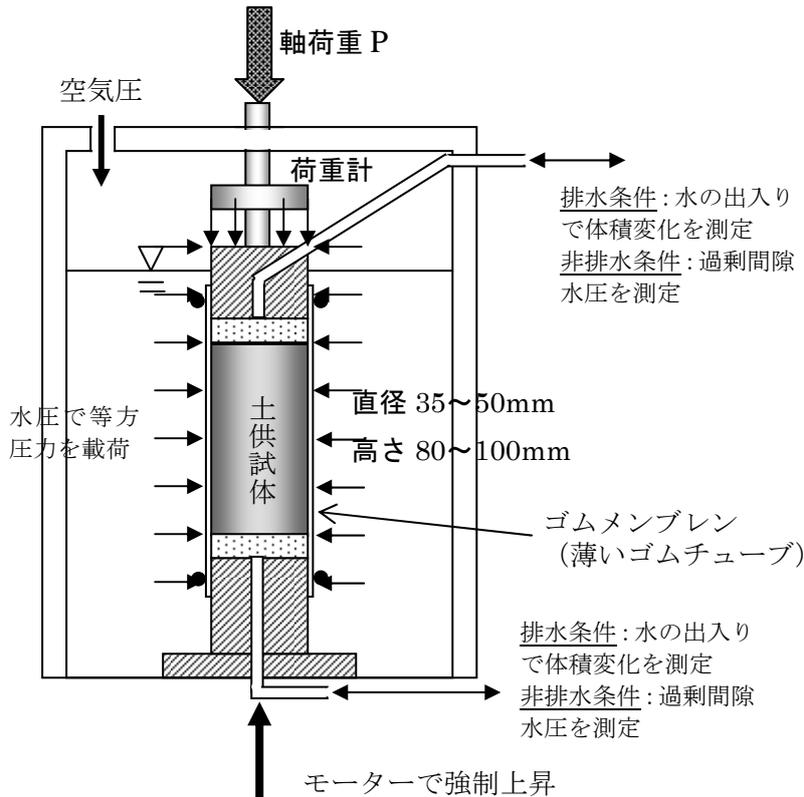


モールの応力円上のどの応力点が破壊状態に至っているのかは不明

**三軸**：直交する3つの**主応力軸**のこと。  
 3軸あれば3次元の応力状態はすべて表すことができる。  
 一軸圧縮試験は側方応力をゼロとして，鉛直応力だけ載荷する試験。

一軸圧縮試験で得られるモールの応力円

【土のせん断強度を測定する試験(2) : 三軸圧縮試験】



三軸圧縮試験の種類 (3種類)

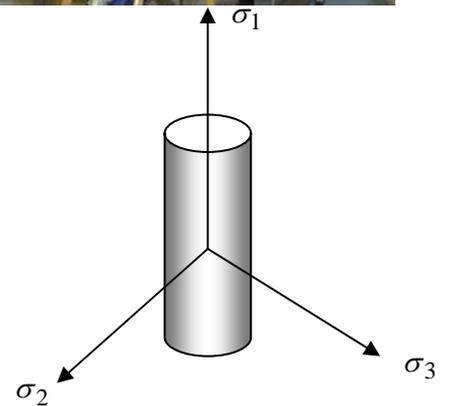
	等方圧力による 圧密過程	軸圧縮による せん断過程
UU 試験	非圧密	非排水せん断
CU 試験	圧密	非排水せん断試験
CD 試験	圧密	排水せん断

(注: 読むときは、「非圧密非排水せん断試験」というようにつなげて読む)

以下, 簡単のため, CD 試験に限定して話をします。

試験方法:

- ① 供試体を取りまく水による水圧で等方的な圧力を載荷する。粘土の場合は十分圧密が終了してから②に進む。砂の場合は、瞬時に圧密は終わるので、すぐに②に進める。  
(圧密終了した時点で、等方的に載荷した圧力はすべて有効応力になっていることから、この圧力を有効拘束圧と呼ぶ)
- ② 等方圧力を載荷したまま、三軸セルの下側から一定の速度で台全体を上昇させて、円柱型の供試体を軸圧縮させる (鉛直変位 2cm 程度まで)。
- ③ 軸変位から軸ひずみを計算し、軸荷重から軸差応力を計算し、軸差応力と軸ひずみの関係 (応力~ひずみ関係) をグラフに描く。
- ④ 供試体から出入りする排水量から体積ひずみ (=排水した間隙水の体積/初期の供試体体積) を計算し、体積ひずみと軸ひずみの関係をグラフに描く。



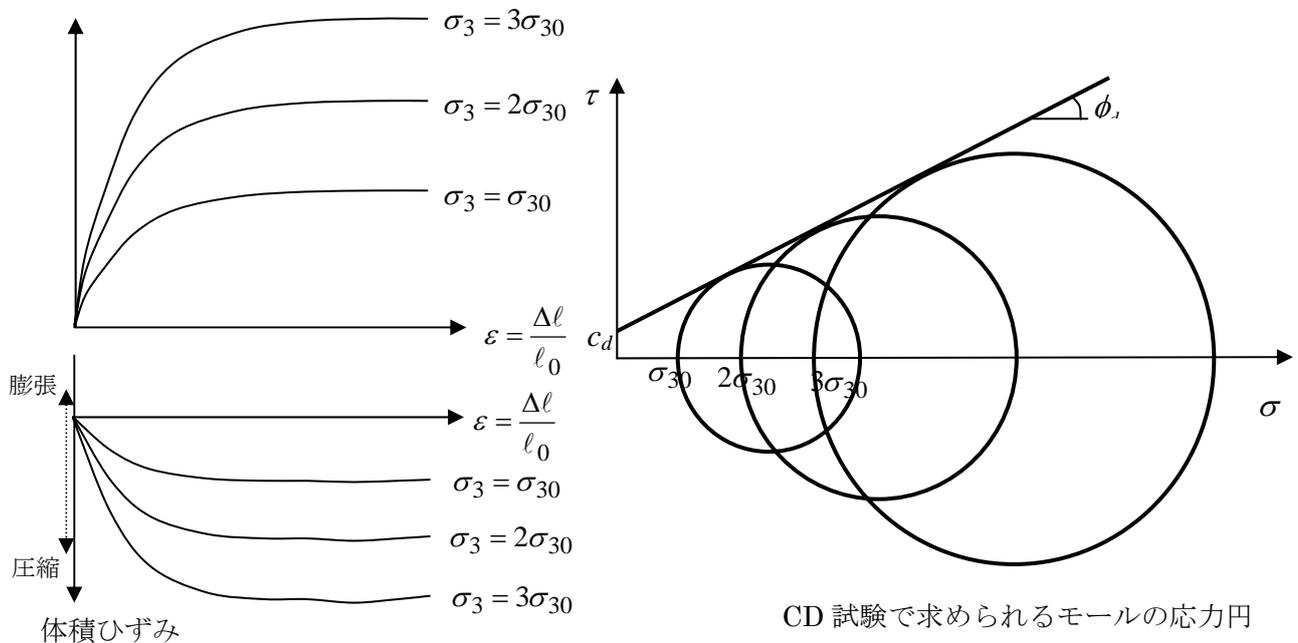
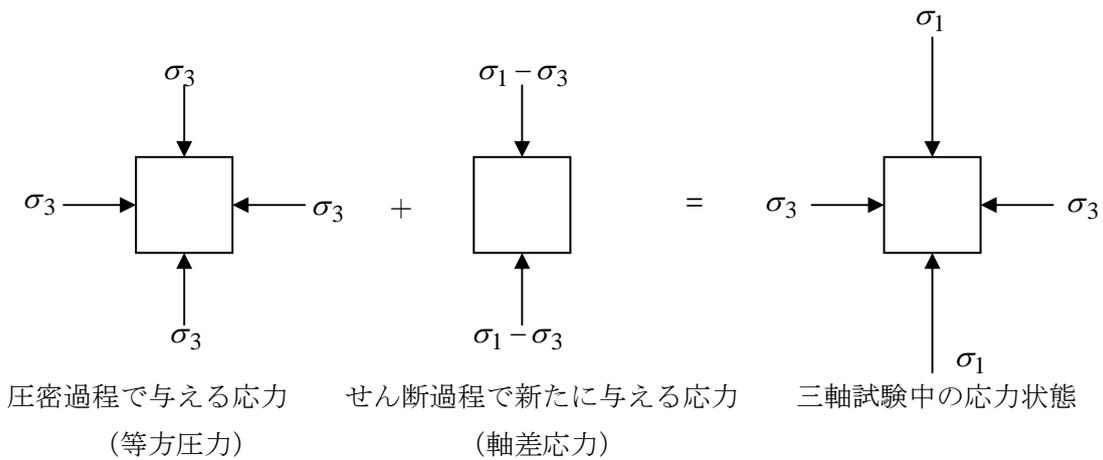
三軸圧縮試験では、 $\sigma_1$  (最大主応力) と  $\sigma_2 = \sigma_3$  (最小主応力) を載荷する。

- ⑤ 何種類か側方圧力を変えて、①～④の実験を行う。
- ⑥ それぞれの実験の等方応力（最小主応力）と軸差応力（最大主応力と最小主応力の差）から求められる最大主応力を用いて、モールの応力円を描く。
- ⑦ 粘着力  $c$  とせん断抵抗角（内部摩擦角）  $\phi$  を求める。

実際現象は、圧密とせん断が別々に発生するようなことはないが、実験室では圧密とせん断を分けることができる。ここでいう圧密とせん断とは、

圧密：等方的な圧力、あるいは1次元応力のように、土に圧縮変形を与え、体積変化を起こさせる現象で、破壊には直接関係しない。

せん断：軸差応力（縦軸と横軸の応力に差がある状態）を与えることにより、せん断応力を発生させることによって、土にせん断変形を与え、やがて土を破壊させる現象。



圧密排水せん断試験（CD 試験）

CD 試験で求められるモールの応力円

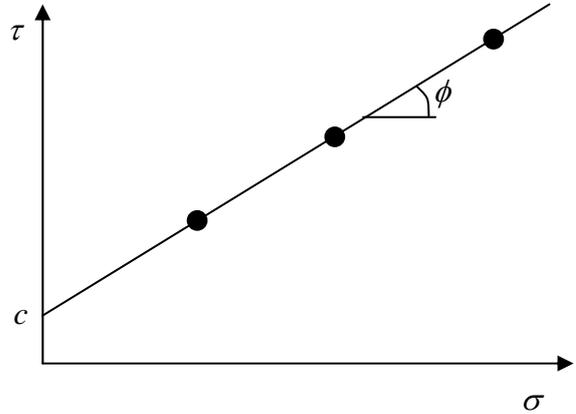
【三軸試験とモール・クーロンの破壊規準】

【モール・クーロンの破壊規準】

クーロン (Coulomb) の破壊規準 :

一面せん断試験は、計測している応力状態 (垂直応力とせん断応力) が破壊面での応力状態そのものであるため、例えば、3 種類の垂直応力で一面せん断試験を実施して、それぞれの (最大せん断応力) が求められれば、それを右図のようにプロットすれば、ほぼ直線に並ぶ。

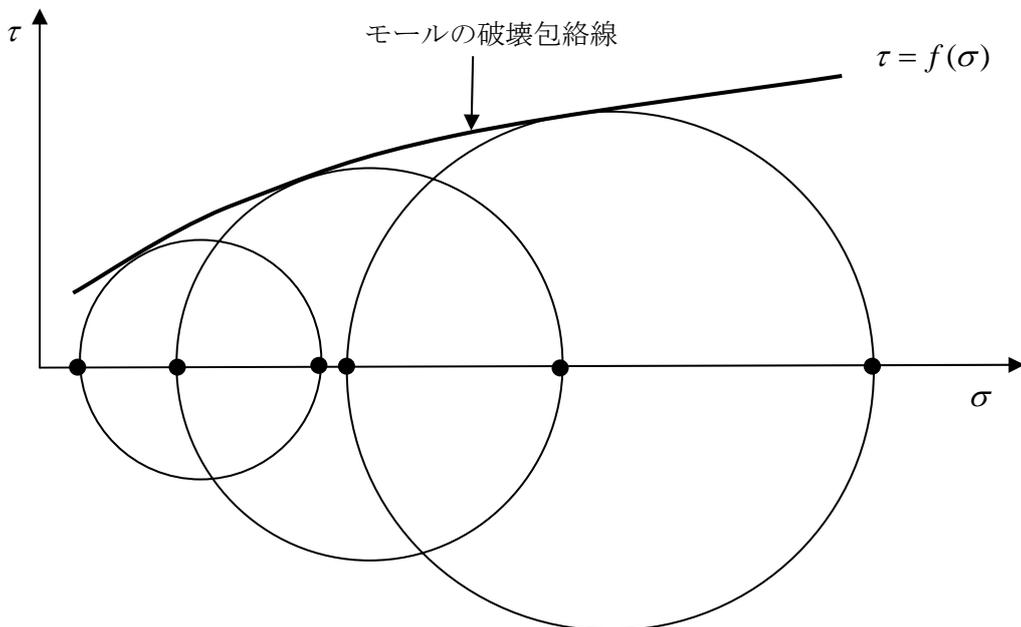
このとき、切片を  $c$ 、直線の傾きの角度を  $\phi$  とし、次式のように土が破壊する条件を表した。



$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad \rightarrow \text{クーロンの破壊規準}$$

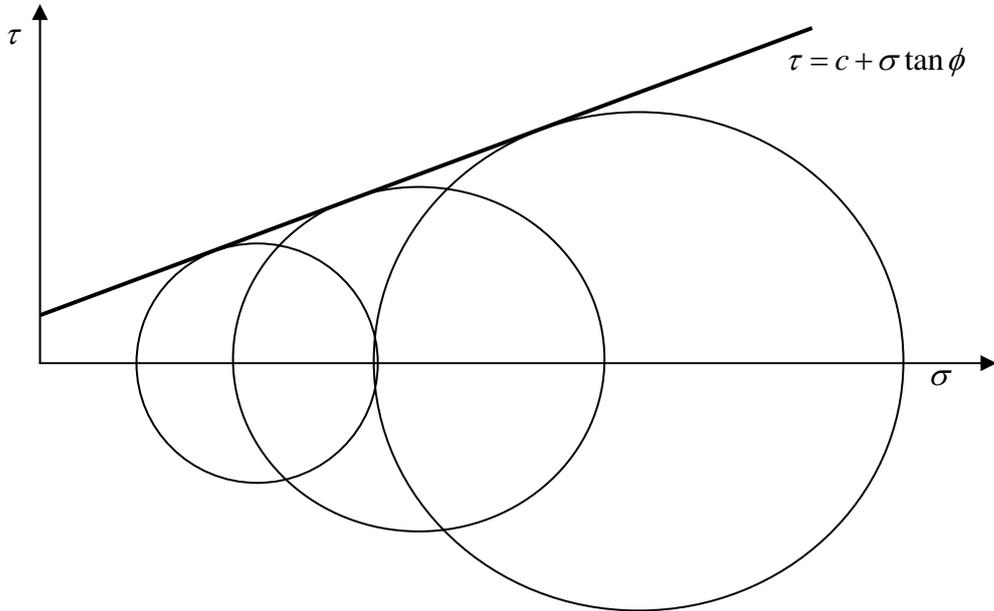
モール (Mohr) の破壊規準 :

三軸試験 (CU あるいは CD 試験) を 3 種類以上の拘束圧で実施し、それぞれについて破壊時の主応力状態※を用いてモールの応力円を描いた場合、下図のように、モールの応力円の包絡線を描くことが出来る。この包絡線は、クーロンの破壊規準と同様に、それより上の領域では、土は壊れていることを意味しており、モールの破壊規準と呼ばれている。この図のように、包絡線が曲線 (特に上に凸の曲線) となるのは、不飽和土の場合に多く見られる。 (※三軸試験では、主応力しか計測していない。)



**モール・クーロン (Mohr-Coulomb) の破壊規準 :**

モールの破壊規準の場合と全く同様に、三軸試験の結果からモールの応力円を描いた場合、特に飽和土や砂の場合には、破壊包絡線は直線となる場合が多い。その場合の直線は、クーロンの破壊規準における直線と同じものである。このように、モールの応力円の包絡線から、クーロンの破壊規準と同様の直線を引いて破壊規準を定めたものを、2つの破壊規準をあわせてモール・クーロンの破壊規準と呼ぶ。



**【モール・クーロンの破壊規準の主応力表示】**

破壊規準の直線  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  上にある点  $(\sigma, \tau)$  は三軸試験の試験で計測された主応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  を用いて、

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi$$

と表すことができる。

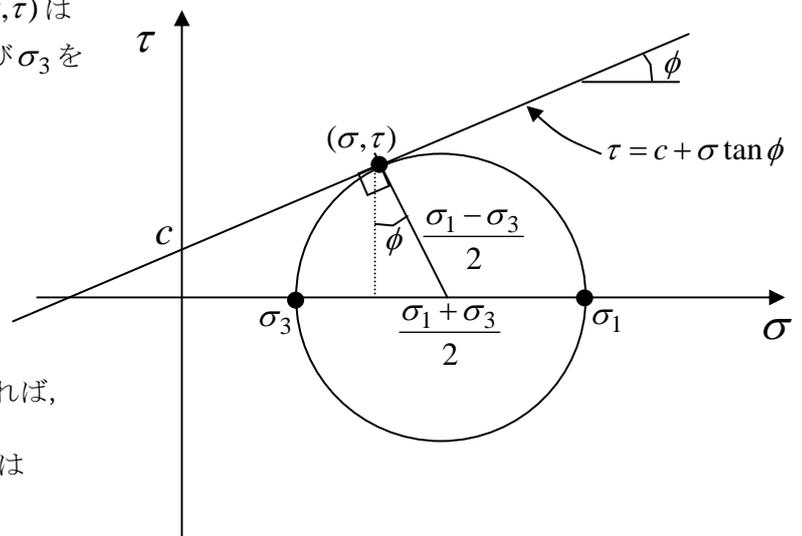
これを元の破壊規準  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  に代入すれば、

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi \quad \text{または}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi$$

となる。これを**モール・クーロンの破壊規準の主応力表示**と呼ぶ。

もちろん、上図の幾何学的な関係、 $(c \cot \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}) \sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  からも直接求めることができる。



### 【モール・クーロンの破壊規準と破壊面との関係】

砂の CD 条件の三軸試験において、モール・クーロンの破壊規準を考えた場合、破壊時の主応力が  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  だった場合に、破壊条件に達している（すなわち、破壊規準の直線上にある）垂直有効応力とせん断応力の値はそれぞれいくらになるのか考察する。また、そのような破壊規準に達している応力状態が作用する面は、水平面（すなわち最小主応力  $\sigma_3$  が作用する面）から、どれだけ傾いているのかも考察する。

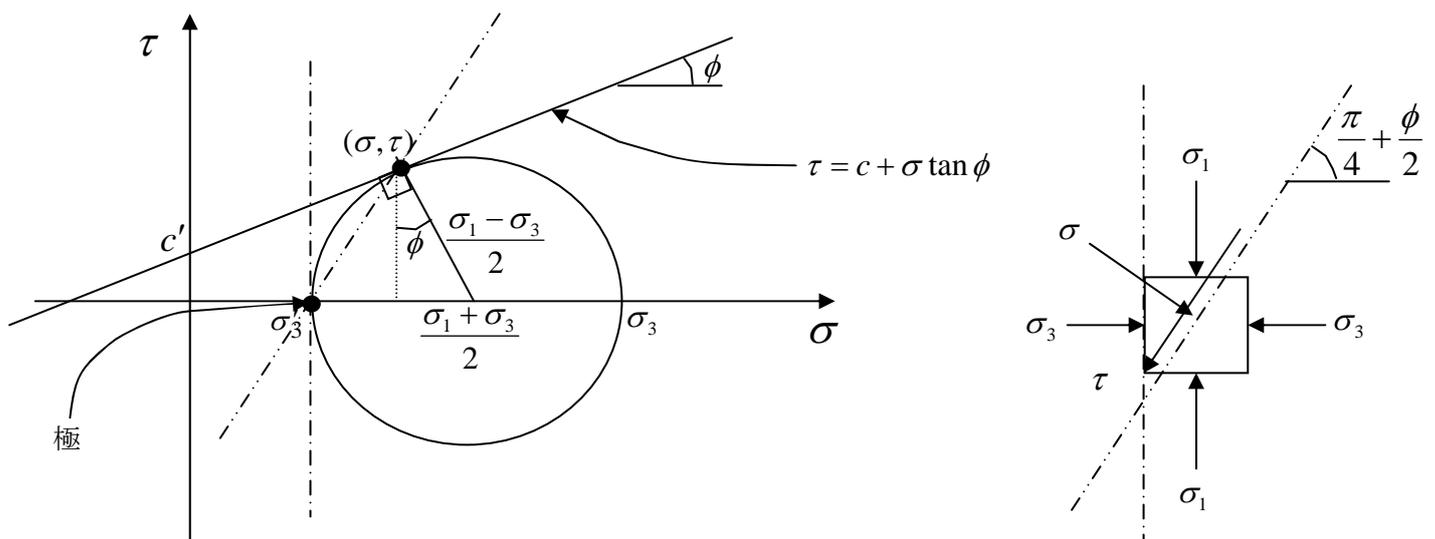
下図より、モールの応力円の幾何学的な関係から、破壊基準  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  に達している応力状態  $(\sigma, \tau)$  は、

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi, \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi$$

となる。

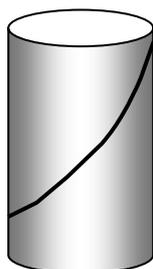
それらが働く面の方向は、 $\sigma_3$  が働く最小主応力面をモールの応力円の図上に描けば、 $(\sigma_3, 0)$  が極であることが求まり、その極から  $(\sigma, \tau)$  へ引いた線がその応力が働く面となる。したがって、幾何学的な関係

から、最小主応力面からは  $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ 、最大主応力面からは  $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  傾いた面となる。



この考察は非常に重要な意味がある。

このように、三軸試験では、主応力で載荷することにより、垂直応力とせん断応力の比が最も危険となる、すなわち破壊規準を満たす組み合わせとなる、応力状態が自ずと現れるようにしている。また、その応力状態が作用する面は、土のせん断抵抗角によって決まる傾きとなる。



実際に三軸試験した粘土の供試体には、上の図のように「せん断面」と呼ばれる不連続面が観察される場合がある。この面の傾きは、供試体の形状や実験条件（載荷速度、排水条件等）によって変わるが、 $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  に近い角度が観察されることが多い。

三軸圧縮試験後の粘土供試体

### 【三軸条件：三軸応力状態】

三軸とは直交する3つの主応力軸のことであった。

応力状態を図示するとき、2次元にしろ3次元にしろ何気なく、お互いの軸が直交するように描いてきた。(正方形が良い例)それは、応力テンソルは対称テンソル(行列)だからである。対称行列の各固有ベクトルはお互いに直交する性質がある。すなわち、主軸は直交する。応力テンソルの固有値は主応力であるが、要するに主応力軸は主軸そのものであり、お互いに直交する。

簡単のため2次元応力状態を考える。

応力テンソル $\sigma$ に2つの異なる固有値( $\sigma_1, \sigma_3$ )、固有ベクトル( $\lambda_1, \lambda_3$ )が存在したと仮定する。

この場合、( $\sigma_1, \sigma_3$ )はそれぞれ最大および最小主応力に相当し、( $\lambda_1, \lambda_3$ )は( $\sigma_1, \sigma_3$ )が作用する方向の基底ベクトルを表す。ここで( $\sigma_1, \sigma_3$ )はスカラーであり、( $\lambda_1, \lambda_3$ )はベクトルであることに注意。

固有値の定義から、 $\sigma\lambda_1 = \sigma_1\lambda_1 \cdots$  式(1) および  $\sigma\lambda_3 = \sigma_3\lambda_3 \cdots$  式(2) である。

式(1)の両辺の左から $\lambda_3^T$ を掛けると、 $\lambda_3^T\sigma\lambda_1 = \sigma_1\lambda_3^T\lambda_1$  となるが、この式を両辺転置すると、

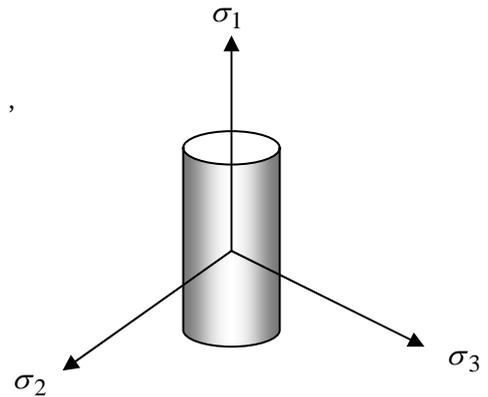
$\lambda_1^T\sigma\lambda_3 = \sigma_1\lambda_1^T\lambda_3 \cdots$  式(3)となる。一方、式(2)の両辺に左から $\lambda_1^T$ を掛けると、

$\lambda_1^T\sigma\lambda_3 = \sigma_3\lambda_1^T\lambda_3 \cdots$  式(4)となる。式(3)と(4)の右辺を比べると、

$\sigma_1\lambda_1^T\lambda_3 = \sigma_3\lambda_1^T\lambda_3$  となり、移項して整理すると、

$(\sigma_1 - \sigma_3)\lambda_1^T\lambda_3 = 0 \cdots$  式(5)となる。 $\sigma_1 \neq \sigma_3$ であるので、式(5)が成立するためには、

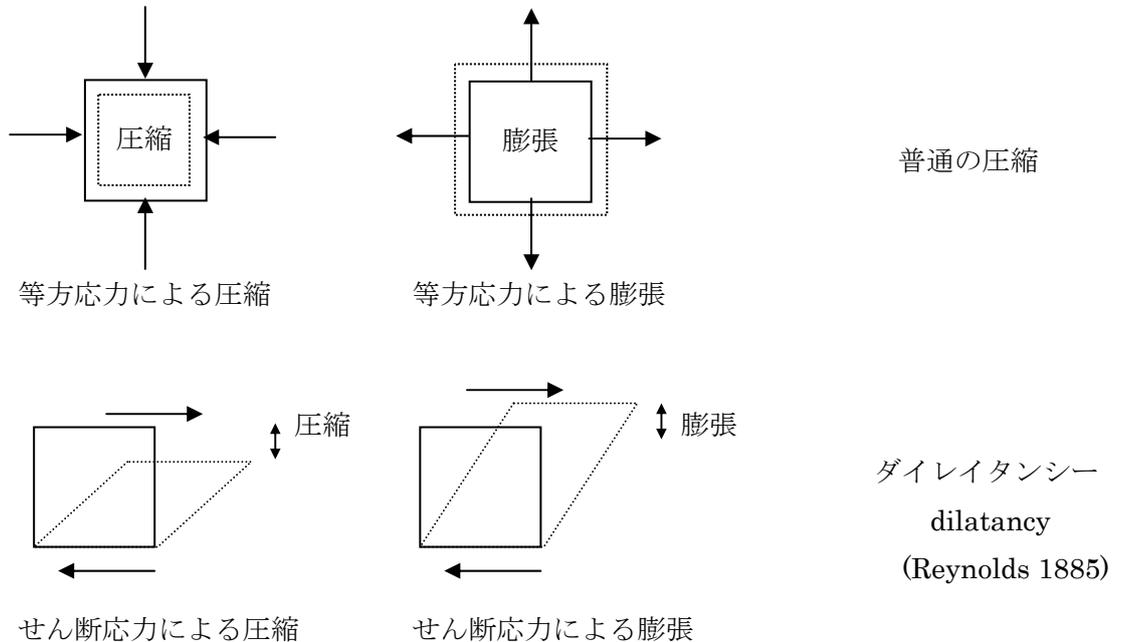
$\lambda_1^T\lambda_3 = 0$ すなわち、 $\lambda_1 \perp \lambda_3$ で無ければならない。(主軸は直交する)



【土のダイレイタンス】

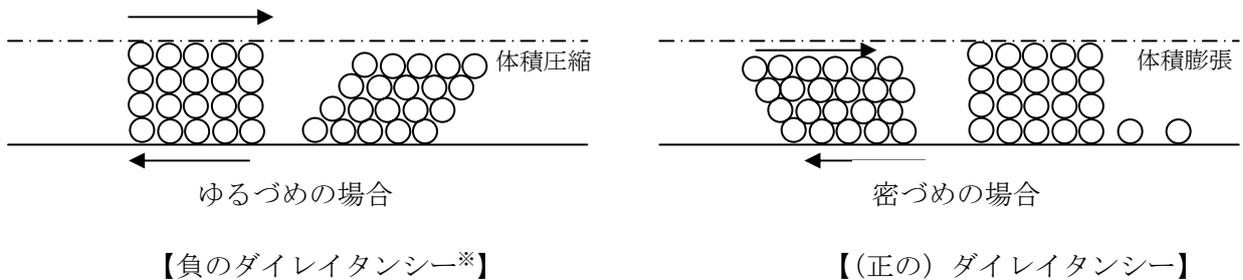
(1) ダイレイタンスとは

圧縮や膨張などの体積変化は、通常は等方的な応力が作用して発生する。しかし、せん断応力が作用して体積変化が起こる場合がある。これをダイレイタンスと呼ぶ。



(2) ダイレイタンスの発生原因

ダイレイタンスは粒状体の典型的な挙動である。



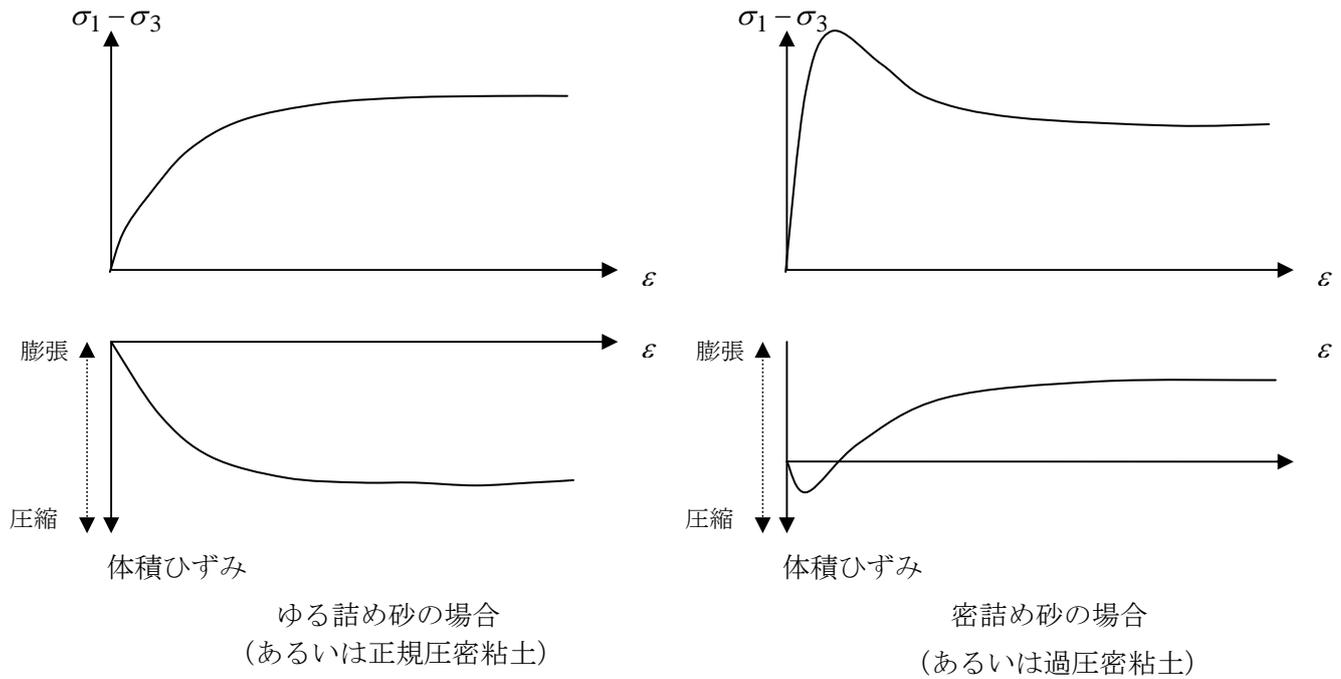
(3) 身近なダイレイタンスの例

- ・ 砂浜の波打ち際で砂を踏むと一瞬乾いたように（水が吸い込まれていくように）見える。
- ・ 小麦粉などの粉を器に入れるときに、ゆするとたくさん入るようになる。
- ・ コーヒー豆をミルで挽くとき、抑えるものが無くてもコーヒー豆は粉になる。
- ・ 金属の玉がたくさん入った箱の中にむやみに手をいれようとするとき、あふれてしまう。
- ・ 満員電車で降りるために動くと、大きな抵抗を受ける。

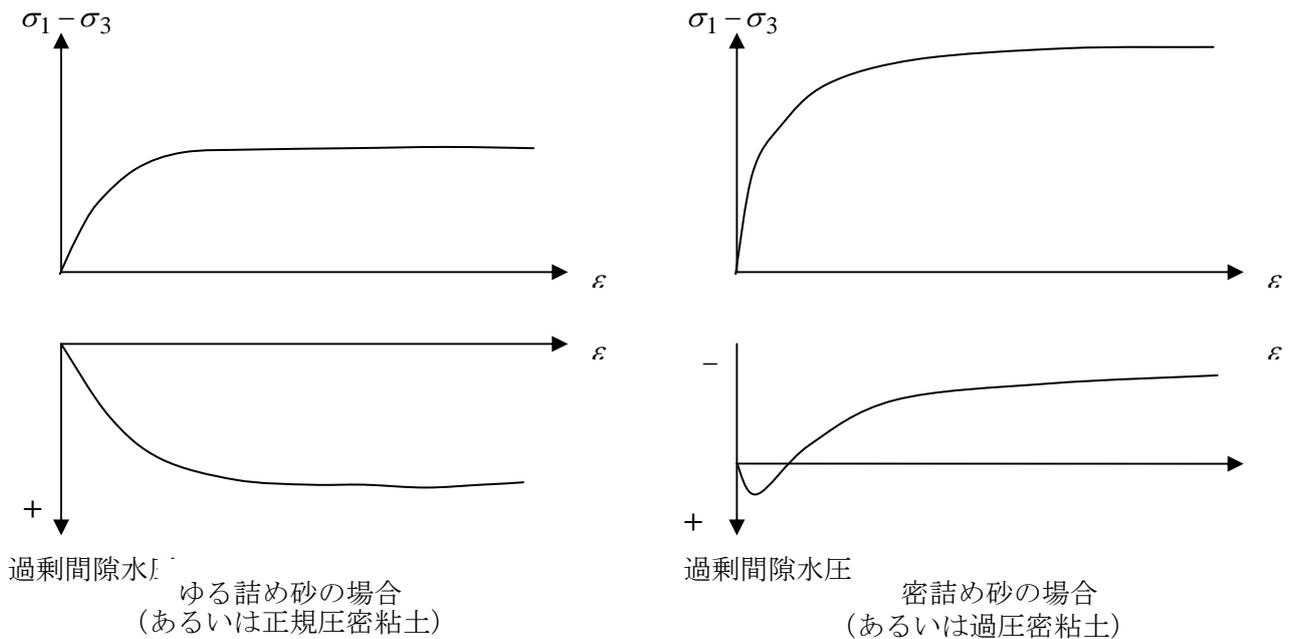
(他にもいろいろ考えてみましょう)

(4) 実際の砂の挙動 (排水条件 CD 試験)

砂粒の間隙が水で満たされており、その水が出入り自由な排水条件である場合には、軸圧縮に伴うせん断により、ゆる詰め砂は圧縮してゆき、密詰め砂は膨張する。密詰め砂が最初に少し圧縮するのは弾性圧縮のためである。ダイレイタンスは塑性挙動であり、弾性圧縮が終わったあとに、大きく発生する。



(5) 実際の砂の挙動 (非排水条件 CU 試験)



間隙水の出入りを許さない条件 (非排水条件・等体積条件) でせん断すると、

ゆる詰め砂 (あるいは正規圧密粘土) の場合：

砂粒の立場では、圧縮したいのにさせてもらえない。圧縮させないように砂粒を膨らまそうとする内力が働く (これが、正の過剰間隙水圧)

水の立場では、隙間が狭くなろうとして窮屈なので外に出たいが出られない。押し込められた水には正の過剰水圧が発生。

密詰め砂 (あるいは過圧密粘土) の場合：

砂粒の立場では、膨張したいのにさせてもらえない。膨張させないように砂粒を凝集・吸着しようとする内力が働く (これが、負の過剰間隙水圧)

水の立場では、隙間が広くなろうとするので、外から入ってきてほしいがこない。引っ張られる水には負の過剰水圧が発生。

# 解答例

平成17年度土質力学I及び演習(B班)小テスト

(平成18年1月17日実施)

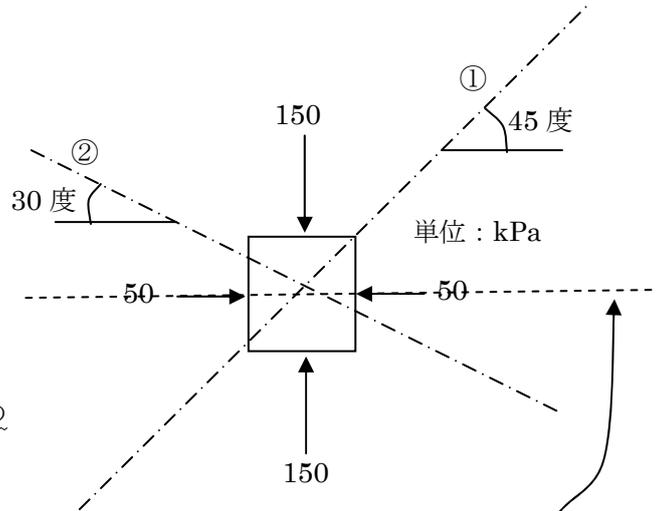
## 【1】

右の図のような応力状態があったとする。

モールの応力円を用いて、図のように水平面から①45度と②30度傾いた面に作用する応力ベクトルの垂直応力成分\*とせん断応力成分\*の大きさと向きを求めよ。ただし、各応力成分の向きは図で正確に示すこと。

(\*注：単に垂直応力，せん断応力と呼ぶことも多い)

なお、用極法を用いても用いなくても、極の位置をモールの応力円上に正確に示しなさい。

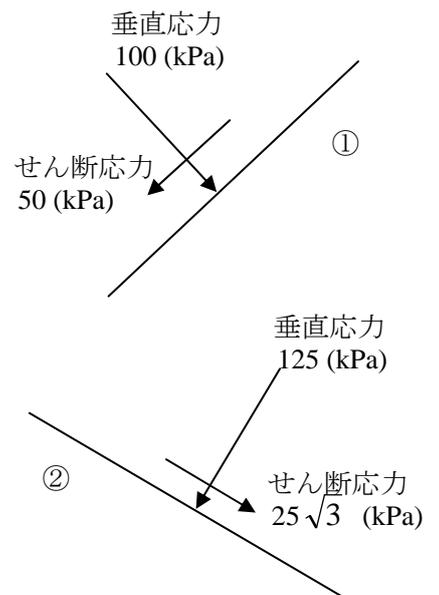
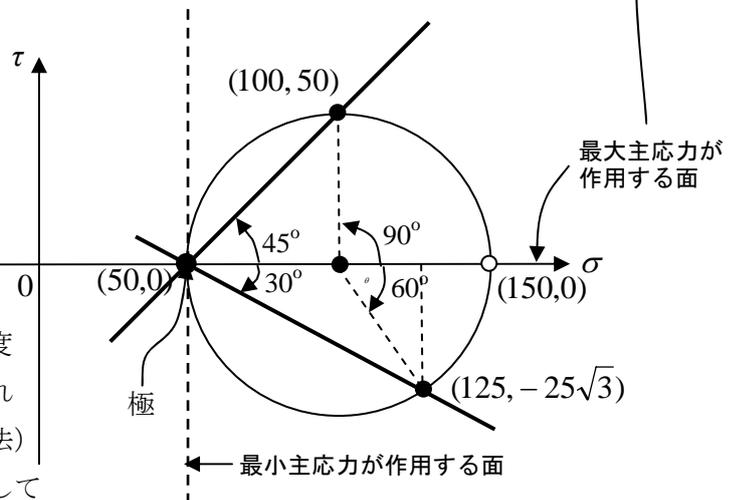


## 【解答と解説】

最小主応力 50kPa が作用している面は、鉛直面であるので、(50, 0)そのものが極となる。また、最大主応力 150kPa が作用しているのが水平面であるので、(150, 0)を通る水平線を引いたときの、その線と円周との交点が極なので、やはり(50, 0)が極である。

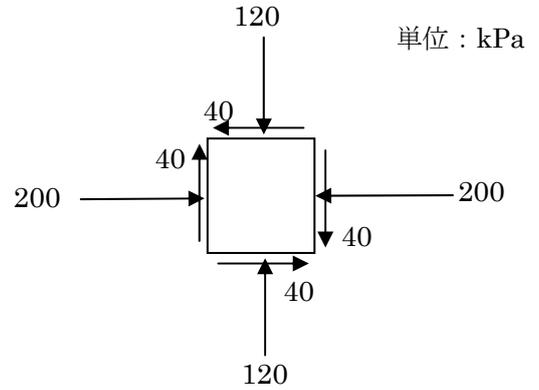
水平面から反時計回りに45度および時計回りに30度傾いた面に作用する応力は、極を通るようにしてそれぞれの面を直接モールの応力円上に描き込む(用極法)か、あるいは円の中心を基準にして、水平面に作用している最大主応力の点(150, 0)を反時計回りに90度および時計回りに60度(それぞれ実際の傾きの2倍の角度)回転することによっても、①(100, 50) および②(125, -25√3) が得られる。

最終的にそれぞれの応力点の垂直応力とせん断応力を図示すると、右の図ようになる。せん断応力の向きは、①の場合は正の値なので、モールの応力円の約束より、反時計回りのモーメントを発生させる向きとなる。また、②の場合が負の値であるので、逆に時計回りにモーメントを発生させる向きとなる。結局いずれの面においても、最大主応力が鉛直下向きであるので、せん断応力は斜め下向きになる。

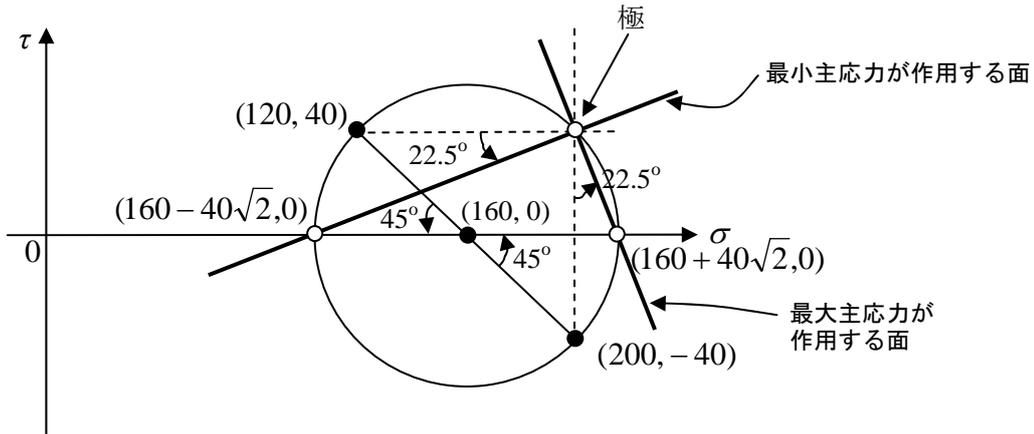


【2】

右の図のような応力状態があったとする。  
 モールの応力円を用いて、最大主応力および最小主応力の大きさとそれぞれが作用する面が水平面からどれだけ、どの方向に傾いているか答えよ。必要があれば図示せよ。  
 なお、用極法を用いても用いなくても、極の位置をモールの応力円上に正確に示しなさい。



【解答と解説】



垂直応力 120kPa が作用する水平面には、反時計回りのモーメントを発生させる向きのせん断応力 40kPa が作用しているため、モールの応力円上には(120, 40)の点として描かれる。一方、垂直応力 200kPa が作用する鉛直面には、時計回りのモーメントを発生させる向きのせん断応力 40kPa が作用しているため、モールの応力円上には(200, -40)の点として描かれる。したがって、この2点を直径とするモールの応力円を描くことができる。

極は、(120, 40)からその応力が作用する水平面を引いた時に、その線と円周が交差する点(200,40)である。

最大および最小主応力の値は、モールの応力円の半径が  $40\sqrt{2}$  であることから、それぞれ  $160 + 40\sqrt{2}$  および  $160 - 40\sqrt{2}$  となる。また、それぞれが作用する面は、極とそれぞれの応力点を結んだ線で表すことができる（用極法）。すなわち、最大主応力が作用する面は、鉛直面から 22.5 度だけ反時計回りに回転した面であり、最小主応力が作用する面は、水平面から 22.5 度だけ反時計回りに回転した面である。

用極法を用いなくても、最大主応力が作用する面は(200, -40) が作用する面（すなわち鉛直面）から反時計回りに  $45/2=22.5$  度回転した面であり、最小主応力が作用する面は(120, 40) が作用する面（すなわち水平面）から反時計回りに  $45/2=22.5$  度回転した面であることがわかる。