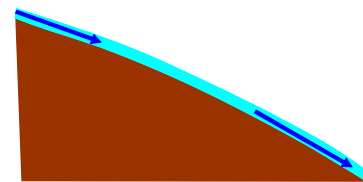


【土中の水の流れ】

(1) 水頭 (全水頭, 圧力水頭, 位置水頭) とエネルギー

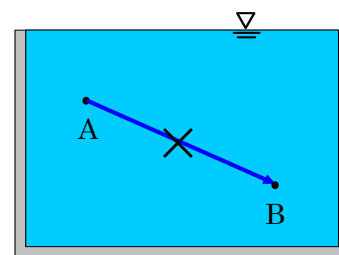
水は「高い」ところから「低い」ところに流れる。と言っても、「高い」「低い」というのは、位置だけの話ではなく、それぞれの位置での水の圧力も含めた、全水頭の話である。

図 1(a)のように、位置に比べて水深が無視できるような、表面流れを考える場合には、(水深から算定される) 水圧が無視できるので、水の流れは「高い」位置から「低い」位置に流れる。



(a) 表面流れ 位置のみで流れの方向が決まる。

ところが、図 1(b)のように、位置に比べて水深が無視できないような、水槽の中の水を考える。水槽の中の水が静置されているとき、A 点の方が、B 点よりも位置が高いからと言って、A 点から B 点へ水が流れるとは普通は考えない。これは A 点と B 点とは、位置の高さが違ってても、全水頭は等しいからである (図 2 参照)。すなわち、水の流れを支配する「高い」「低い」は全水頭の高低である。



(b) 水槽の中の水 位置だけでは流れの方向が決まらない

図 1

水頭 : 水の柱の一番上 (頭) の高さを表す。単位は (m)
水理学でエネルギーを表すために使う概念のひとつ。

圧力水頭 : 対象とする位置での水圧の大きさを、水柱の高さに換算して表したもの。例えば、圧力水頭 1m なら、実際の圧力 p_w は、

$$p_w = \gamma_w \times h = 1(\text{tf/m}^3) \times 1(\text{m}) = 1(\text{tf/m}^2) \text{ となる。}$$

$$(\text{SI 単位ならば、} p_w = \gamma_w \times h = 9.8(\text{kN/m}^3) \times 1(\text{m}) = 9.8(\text{kN/m}^2))$$

逆に、 $9.8(\text{kN/m}^2)$ の圧力を持つならば、その圧力水頭は 1(m)である。

位置水頭 : ある任意の基準面から、対象とする位置までの水柱の長さ。

任意の基準面からの位置であるので、相対的なものであることに注意する。要するに位置エネルギーを表す。

全水頭 : 通常の土質力学では、**圧力水頭と位置水頭の和**のことを言う。しかし、土質力学でも水理学でも、全水頭の本当の定義は、速度水頭と圧力水頭と位置水頭の和のことを言うが、土中の流速は非常に小さく、速度水頭は他の水頭に比べて無視できるほど小さいために、土質力学でははじめから考えないことにしている。そのため、冒頭の

$$\text{全水頭} = \text{圧力水頭} + \text{位置水頭}$$

という定義となる。

水理学では、全水頭から速度水頭を除いた、位置水頭と圧力水頭の和のことをピエゾ水頭と呼ぶが、土質力学での全水頭はこのピエゾ水頭そのものである。すなわち、土質力学では、全水頭 = ピエゾ水頭である。もともと水頭とはエネルギーを表すための概念であるから、ピエゾ水頭とは何を表すためのものかと言えば、全エネルギーから速度エネルギーを除いたものであるから、当然ポテンシャルエネルギーを表すものである。

したがって、土質力学での全水頭はポテンシャルエネルギーを表す。位置水頭が位置の基準面によってかわる相対的なものであるので、全水頭もやはり相対的なものである。したがって、全水頭の大きさそのものより、全水頭の「勾配」の方が透水解析には重要となる。これは、ポテンシャルを扱うどの力学でも同じことである。

圧力水頭の基準面は水面であり静置した水では圧力水頭は水深を表す。位置水頭は、基準面からの高さそのものを表す。したがって、図1のような場合には、全水頭はどの深さ、どの位置であつても等しくなる。したがって、水槽内では水の流れは起こらない。

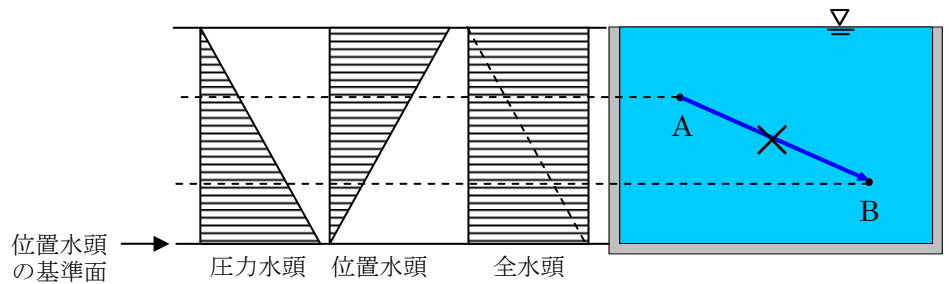


図2 静置した水槽内の水の水頭

(2) 一次元場での土中の水の流れ

図3のように、水位の異なる2つのパイプを並べて、底面をチューブで連結させる。もし、水の流れを遮るものがなければ、一瞬にして、2つのパイプの水位差はなくなる。

しかし、厚さが無視できる板が図の位置に固定されており、完全に上下が遮断されている場合には、各水頭の分布図は図3のようになる。

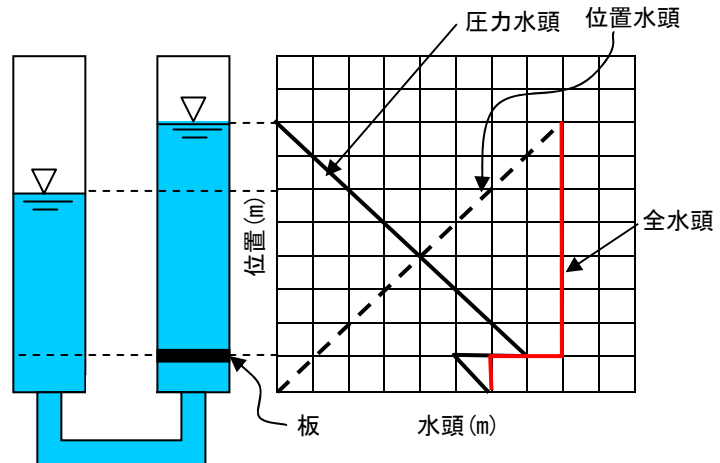


図3

要するに、2つのパイプの水位差を保つためには、水を遮断している板は2mの圧力水頭の差(2m分の水柱の重さ)を支えなければならない。

しかし、完全に板で遮らなくても、ある程度通過するのに時間がかかるような材料を、板の代わりに用いても、2つのパイプの水位差をある程度保つことは可能である。ここでは、砂を用いて流れを「ある程度」遮ることを試みる。ただし、厚さが無視できるような薄っぺらな砂では全く効果が期待できないので、ここでは厚さ3mの砂柱を用いる。ただし、どうしても砂柱中を水が流れて水位が変化してしまうので、現在の水位を維持するように水はそれぞれの位置でオーバーフローさせておくことにする。

水だけの部分では、全水頭は一定であるので、3mの砂柱を挟んで2mの全水頭のギャップが吸収されることになる。砂柱中の上下面には全水頭の差があるので、水は砂柱中のみを下向きに流れる。

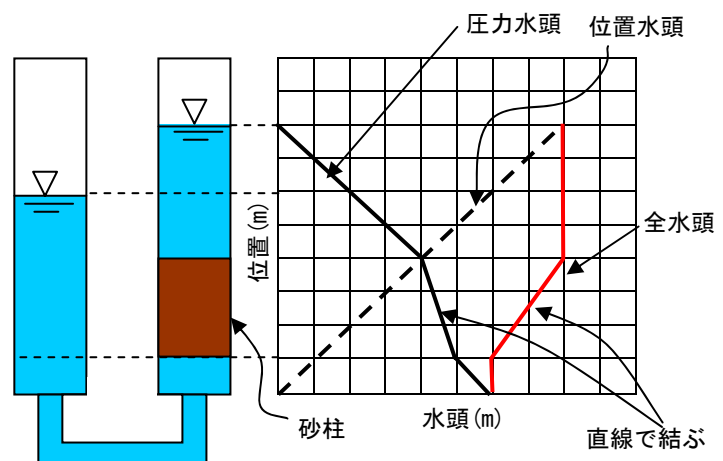


図4

この土中の流れの流速は次項で示すダルシー則によって決まる。水の流れ自体がポテンシャルの差、すなわちポテンシャル場の保存力によって発生するので、流線の方向もその力の方向と同一の等ポテンシャル線(等しいポテンシャルをつないだ線)の「勾配(grad)」の方向となる。この保存力のことを、土中の水理では、透水力(あるいは浸透力)と呼ぶ。

(3) 動水勾配と透水力

ポテンシャルである全水頭が等しいポイントをつなげた等全水頭線（等ポテンシャル線）と呼び、等ポテンシャルを表すスカラー関数の勾配を動水勾配と呼ぶ。等ピエゾ水頭線の勾配を動水勾配と呼ぶのはもちろん水理学でも同じである。等ポテンシャル線の勾配は保存力の方向を表すが、浸透場では全水頭の勾配は浸透力の方向を表す。

一次元の流れ場では、全水頭が $h = h(z)$ と表されるとき、動水勾配は

$$\text{動水勾配} : i = -\frac{\partial h}{\partial z} \quad (i \text{ は無次元量})$$

となる。マイナスの符号は、ポテンシャルの高いところから低い方へ流れることを表している。

透水力 j は、動水勾配 i に水の単位体積重量 γ_w をかけたものであり、土の内部の直接作用する重力と同様の物体力である。

$$\text{透水力} : j = i \cdot \gamma_w \quad (\text{単位体積あたりの力})$$

このように、全水頭が高いところから低いところにかけて物体力である透水力が働き、図4の砂柱にも透水力が作用している。透水力については次回また説明する。

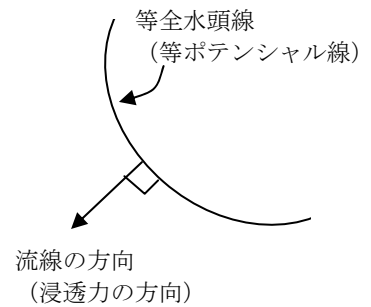


図5

(4) ダルシー則

実際の土中を流れる水は、土粒子の間隙を縫って複雑な経路を伝って流れることになる。その際に、水の流れは大きな抵抗を受けることになる。粘土のように小さな土粒子で構成される地盤材料は透水性が小さく、砂のような大きな土粒子で構成される地盤材料は透水性が大きい。このように、ミクロで見れば実際の水は紆余曲折しながら土粒子から大きな抵抗を受けつつ流れているのであるが、土質力学では、マクロな平均的な水の流れのみを考える。この際に、水の流れ易さを表す指標として、透水係数 k を用いる。

水の流れの方向は透水力の働く方向、すなわち動水勾配の方向に等しいが、その大きさ（流速）は次式で表される。

$$\text{流速} : v = k \cdot i = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1)$$

上式は、ダルシーが実験により、流速が動水勾配に比例するという発見を基に作ったものであり、**ダルシー則**と呼ぶ。また、このようにポテンシャル流れとして表すことができる土中の間隙水の平均的な流れをダルシー流れと呼ぶことがある。動水勾配が無次元量なので、透水係数 k の単位は流速 v と同じの速さの次元となる。透水係数のおおよその大きさは以下の通りである。

透水係数 k (cm/s) : 礫 (レキ) $10^2 \sim 10^1$ 砂 $10^{-1} \sim 10^{-3}$ シルト $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 粘土 $10^{-6} \sim 10^{-9}$

土質力学の実務では、透水係数の単位は cm/s が用いられることが多い。さらに、上記のように土の透水係数の範囲は非常に広いために、透水係数は厳密な値よりも大体のオーダー（何乗の桁か）によって議論される。例えば、この粘土の透水係数は 10 の-6 乗のオーダー、とか、この砂の透水係数は 10 の-3 乗のオーダーである、というような用いられ方をする。要するに、10 倍程度の範囲は、それほど大きな誤差とは見なされない。

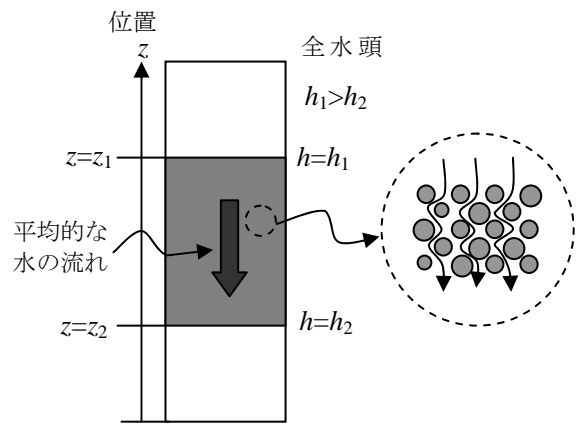


図6

図 6 の例題において、土中の流れがダルシー則に従うとすれば、流速 v は透水係数 k を用いて、

$$v = -k \frac{dh}{dz} = -k \frac{\Delta h}{\Delta z} = -k \frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2} \quad (\text{マイナス符号は下向きの流れを表す})$$

となる。また、図 4 の例題では以下のようになり、砂柱中は一定の流速で、かつ下向きの流れとなる。

$$v = -k \frac{dh}{dz} = -k \frac{\Delta h}{\Delta z} = -k \frac{(8-6)}{(4-1)} = -\frac{2}{3}k \quad (\text{マイナス符号は下向きの流れを表す})$$

(3) 一次元流れ場での連続式

図 6 において、砂柱の断面積が一定であり、一次元の流れとみなすことができれば、砂柱中で水の湧き出しがなければ、一次元の発散の式より、

$$\frac{dv}{dz} = 0 \quad (\text{多次元では, } \text{div } v = 0) \quad (2)$$

が成り立つ。この式を z で積分すれば、 $v = \text{const.}$ となるが、この場合、砂柱の上端から入って、下端から出て行く水の流量は一定であり、単位時間あたりの流量である流速も砂柱中においては一定であることを表している。式(2)は一次元流れ場での連続式である。

式(2)の連続式に、式(1)のダルシー則を適用すると、

$$\frac{dv}{dz} = \frac{d}{dz} \left(-k \frac{dh}{dz} \right) = -k \frac{d^2h}{dz^2} = 0 \quad \text{より} \quad \frac{d^2h}{dz^2} = 0 \quad (\text{一次元流れ場でのラプラスの式}) \quad (3)$$

となる。この式を 2 回積分してやれば、 $h = a \cdot z + b$ (a, b は定数) となり、全水頭は砂柱中では一次関数

(直線) となる。また、 $h = z + \frac{u}{\gamma_w}$ を、式(3)のラプラスの式に代入すれば、圧力水頭 u についても

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0 \quad \text{となり、やはり} \quad u = c \cdot z + d \quad (c, d \text{ は定数}) \quad \text{となり、圧力水頭も砂柱中では必ず直線となる。}$$

必ず直線となることがわかれば、砂柱の上下端での全水頭、圧力水頭さえわかれば、砂柱中は上下端の値を直線で結べばよい (図 4 参照)。

(4) 上向き透水

図 4 は砂柱中を下向きに水が流れる場合を考えたが、図 5 のような場合を想定すると砂柱中を上向きに水が流れる。砂柱の下端において 2(m) の全水頭の差があるため、下から上への浸透流が生じる。また、図 6 の場合には、当然のことながら土中へ水は流れない。

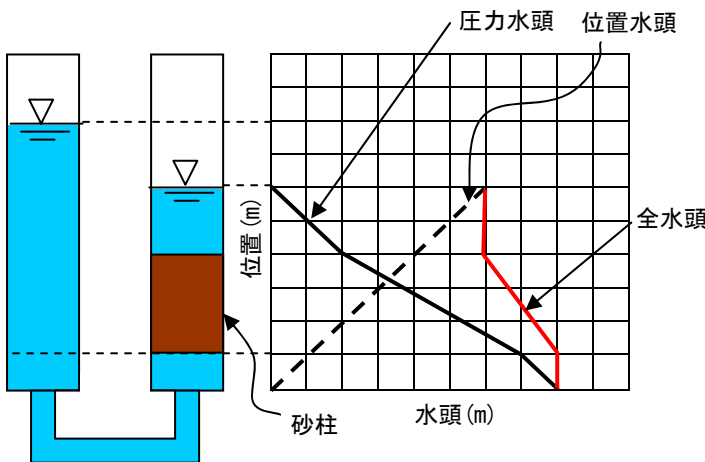


図 5

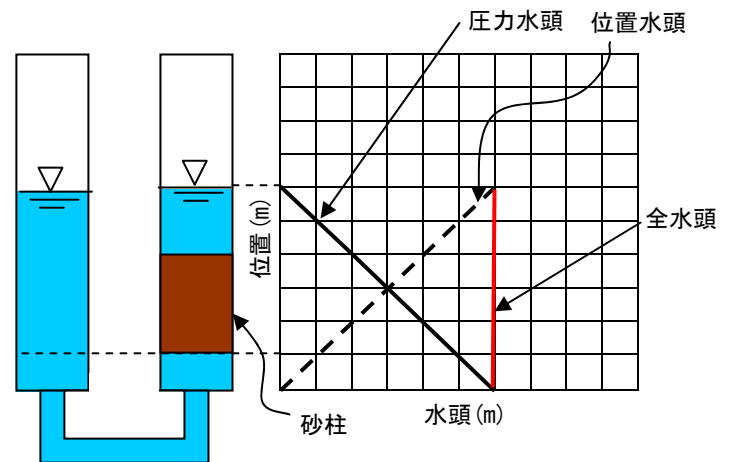


図 6

【土の鉛直一次元場での応力分布】

(1) パイプ内の各断面に働く圧力

図1のように、2つのパイプの水位が等しく、砂柱内には水が流れない場合から、順を追って考える。この場合、右側のパイプ内の全水頭、位置水頭、圧力水頭は図1に示す通りだが、パイプ内の各断面で作用する鉛直方向の圧力の分布について考えてみる。ひとくちに圧力と言っても、この場合には、すでに示している圧力水頭で表されている「水だけの圧力(水圧)」と、砂柱の重量を含む「全体の圧力」がある。

砂柱を構成する砂の飽和単位体積重量 γ_{sat} が $2(\text{tf}/\text{m}^3)$ であった時、右側のパイプの鉛直方向の圧力の分布は図2のようになる。

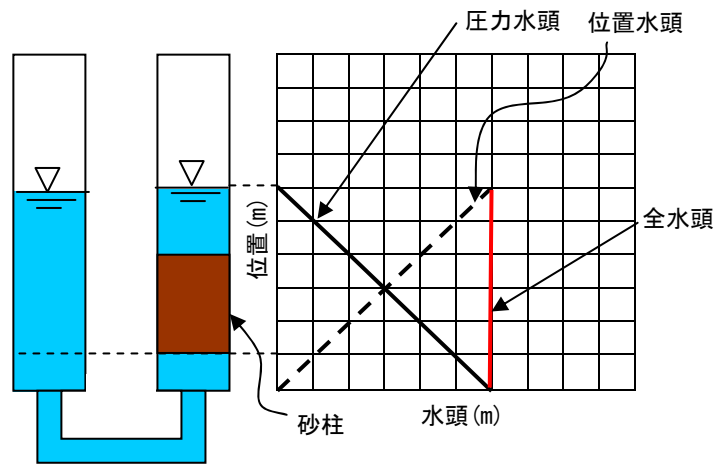


図1

(a) 砂柱を含む全体の圧力分布

$z=4\sim 6(\text{m})$: 鉛直方向の圧力は水圧のみを考え、水の単位体積重量で計算する。

水の単位体積重量を $\gamma_w = 1(\text{tf}/\text{m}^3)$ とすると、 $z=6(\text{m})$ で $0(\text{tf}/\text{m}^2)$ 、 $z=4(\text{m})$ で $2(\text{tf}/\text{m}^2)$ となる。

$z=1\sim 4(\text{m})$: 水も含んだ砂柱の重量で計算する。

砂柱の飽和単位体積重量が $\gamma_{sat} = 2(\text{tf}/\text{m}^3)$ であるので、 $3(\text{m})$ の砂柱があれば、砂柱上端から下端までに $2(\text{tf}/\text{m}^3) \times 3(\text{m}) = 6(\text{tf}/\text{m}^2)$ の圧力増分がある。結局、水の上端から含めて考えれば、砂柱下端の圧力は $2+6=8(\text{tf}/\text{m}^2)$ となる。

$z=0\sim 1(\text{m})$: 再び水のみとなるので、砂柱下端より、 $1(\text{m})$ 分の水圧 $1(\text{tf}/\text{m}^2)$ が加算されて、 $z=0(\text{m})$ の基準面では、合計 $9(\text{tf}/\text{m}^2)$ の圧力が鉛直に作用することになる。

この全体の圧力は、右側のパイプの各深さにおいて、それ以深の水と砂を全部まとめて計った重量を、パイプの断面積で割ったようなものに等しい。左側のパイプの水位には無関係であることに注意する。

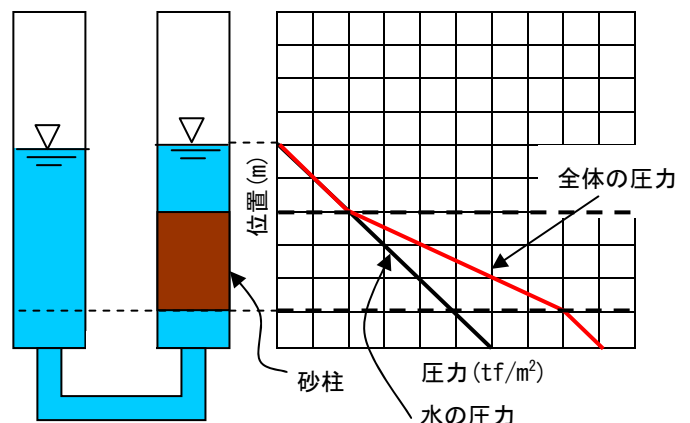


図2

(b) 水圧分布

2つのパイプの水位が等しく、水は静置しているので、水圧の分布は「静水圧」分布となる。すなわち、水の単位体積重量×深さ で水圧分布は算定でき、右側のパイプの水圧分布は上から下まで一直線となる。

(c) 全応力, 有効応力, 間隙水圧

水だけの部分には圧力は水圧しか存在しないが、砂柱の部分では、「水圧」と「全体の圧力」を考えなければならない。砂柱の区間だけを考えると、「全体の圧力」は「全応力」と呼び、「水圧」は「間隙水圧」と呼ぶ。また、「全応力」と「間隙水圧」の差を「有効応力」と呼ぶ。すなわち、

$$\text{「全応力」} = \text{「有効応力」} + \text{「間隙水圧」}$$

この場合の有効応力は、砂柱の各深さにおいて、通水性の金網（砂はこぼれない網）を差し込んだ時に、その金網に作用する圧力に等しい。全応力は砂と水の重量で決まる絶対的なものであるが、有効応力は間隙水圧の値と密接に関連していることに注意する。図2のように左右のパイプの水位が等しい静水圧状態の時には、有効応力=砂の水中単位体積重量×砂柱の深さ で算定可能だが、左右のパイプの水位が異なる場合には、このように単純に有効応力は算定できない（後述する透水力の概念を用いなければならない）。

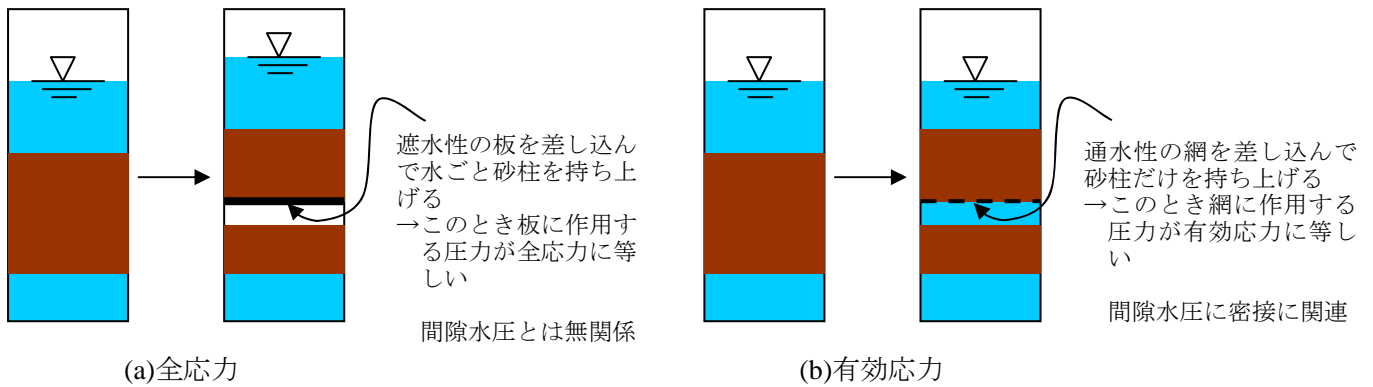


図3 一次元場での全応力と有効応力の考え方

(2) 上向き浸透場での全応力、間隙水圧、有効応力

図4に示す上向き浸透場での砂柱の全応力と間隙水圧について考える。全応力は、右側のパイプの砂と水の重量だけで決まる絶対的なものなので、図3と全く同じ。砂柱下端での間隙水圧は、左側のパイプの水位の上昇にあわせて増加する。この場合、全応力から間隙水圧を引いて求められる有効応力は、砂柱下端において $1(\text{tf/m}^2)$ となり、かなり小さくなる。

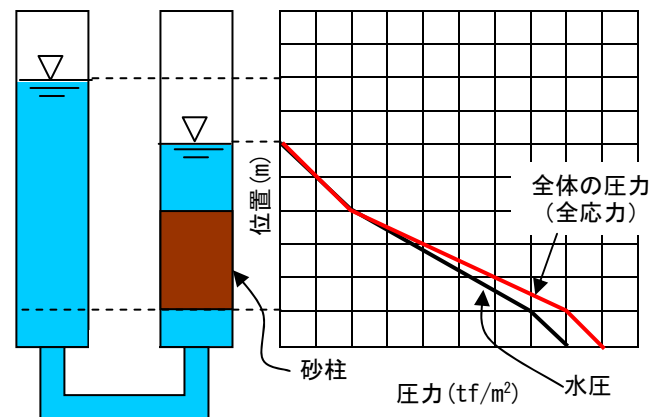


図4

(3) クイックサンド現象

さらに、左側のパイプの水位が $1(\text{m})$ 上昇する場合を考える。全応力は不変であるが、水圧はさらに上昇し、砂柱の中においても全応力と間隙水圧は一致する。すなわち、砂柱全体を通して、有効応力はゼロとなる。このとき、砂柱上端に網でも被せておかない限り、砂は水とともに沸き上がるような現象（ボイリング）を呈する。この現象を、見た目からボイリングと呼んだり、クイックサンド現象と呼んだりする。また、クイックサンド現象が起こる時の動水勾配を、限界動水勾配と呼ぶ。

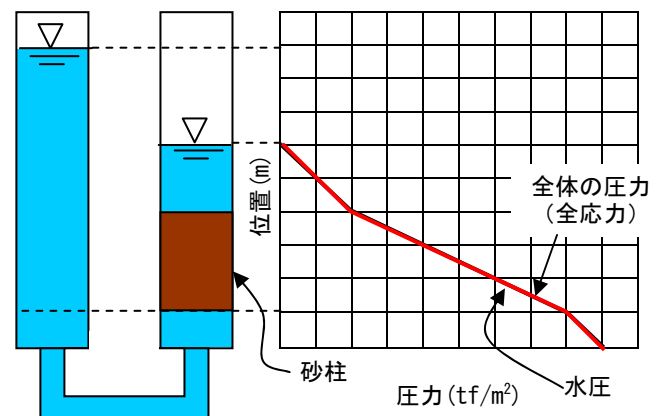


図5

(4) 限界動水勾配と透水力

(a) 全応力, 間隙水圧, 有効応力の式示

この節から簡単のため座標の取り方を変える。図4から図5を通して、砂柱の下端から計測して、右のパイプの水位を H_1 、左のパイプの水位を H_2 とし、砂柱の高さを z とする

- ・砂柱の下端に上から作用する圧力： $\gamma_{sat} \cdot z + \gamma_w \cdot (H_1 - z)$
- ・砂柱の下端に下から作用する圧力： $\gamma_w \cdot H_2$
- ・砂柱の下端での圧力の差 p :

$$p = \{\gamma_{sat} \cdot z + \gamma_w \cdot (H_1 - z)\} - \gamma_w \cdot H_2 = (\gamma_{sat} - \gamma_w) \cdot z - (H_2 - H_1) \cdot \gamma_w$$

$$= \gamma' \cdot z - (H_2 - H_1) \cdot \gamma_w \quad (1)$$

ただし、 $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$ であり、 γ' は水中単位体積重量である。

この p の値が正ならば、砂は下から支えられている状態であり、安定している。この p が (鉛直方向の) 有効応力そのものであり、新たに σ'_v と表記する。また、(鉛直方向の) 全応力は、上から作用する圧力であるが、新たに σ_v と表記する。

結果として、砂柱下端での全応力, 間隙水圧, 有効応力は,

$$\text{全応力} : \sigma_v = \gamma_{sat} \cdot z + \gamma_w \cdot (H_1 - z) \quad (2)$$

$$\text{間隙水圧} : u = \gamma_w \cdot H_2 \quad (3)$$

$$\text{有効応力} : \sigma'_v = \gamma' \cdot z - (H_2 - H_1) \cdot \gamma_w \quad (4)$$

であり、 $\sigma_v = \sigma'_v + u$ が成り立つ (有効応力の原理)。

(b) 透水力

有効応力の式を z で微分して、砂柱内での勾配を計算する。すなわち、

$$\frac{d\sigma'_v}{dz} = \gamma' - \frac{d(H_2 - H_1)}{dz} \cdot \gamma_w = \gamma' - i \cdot \gamma_w \quad (\text{下向きを正}) \quad (5)$$

ただし、 i は砂柱内の動水勾配

静水圧の状態 (図2) であれば、砂柱内の動水勾配はゼロであるので、有効応力は

$$\frac{d\sigma'_v}{dz} = \gamma' \quad (6)$$

と表され、式(6)の積分形すなわち、 γ' に深さ z をかけることにより、有効応力は計算できるが、砂柱内に水の流れがある場合には、動水勾配を考慮して式(5)を用いて計算しなければならない。

式(5)中の $i \cdot \gamma_w$ を透水力と呼び、動水勾配に応じて加わる力である。透水力は、重力と同様に土の内部に直接作用する物体力である。ようするに、透水力は水が砂柱中の小さな間隙の中を流れる時にうける抵抗の反作用として、砂に作用する力である。

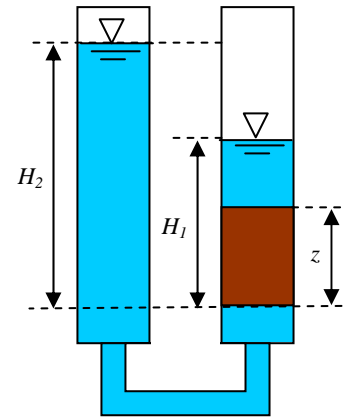


図6

(c) 限界動水勾配とクイックサンド

式(5)の両辺がゼロになり、境界においても σ'_v がゼロであれば、砂柱のいたるところで σ'_v はゼロになる。すなわち、これがクイックサンド現象の発生条件であり、クイックサンド発生時の動水勾配を限界動水勾配 i_c と呼ぶ。

$$\frac{d\sigma'_v}{dz} = \gamma' - i_c \cdot \gamma_w = 0 \quad \therefore i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_w} (= \frac{G_s - 1}{1 + e}) \quad (7)$$

これは、クイックサンドが発生する時の2つのパイプの水位差は、式(7)の限界動水勾配から求めることができるが、式(5)の有効応力をゼロに等置することにより直接求めることもできる。(もともと同じ式なのだから当然であるが)

$$\sigma'_v = \gamma' \cdot z - (H_2 - H_1) \cdot \gamma_w = 0 \quad \therefore H_2 - H_1 = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \cdot z = i_c \cdot z = \frac{G_s - 1}{1 + e} \cdot z \quad (8)$$

これらの式より、図4の状態から、あとどれくらい左側のパイプの水位を上げたら、クイックサンド状態になってしまうかを予測することができる。

クイックサンド状態の砂は、土粒子が完全に浮遊した状態となり、液体状になる(地震時の液状化と同じ状態)。そのため、支持力は全く無くなり、重い物体が砂上に置いてあった場合には、その物体は底なし沼のように砂中に沈んでいってしまう。

【土の透水係数の求め方】

(1) 原位置透水試験と室内透水試験

地盤内の透水性, すなわち係数を求める方法は大きく分けて以下の 2 つある。

- ・原位置透水試験 (現場揚水試験)
- ・室内透水試験

前者は, 原位置にて対象とする地盤内の透水係数を直接求めるものであり, 後者は現場で採取してきた土を, 室内で再構成 (原位置と同じ密度に締め固め) して求める。ダルシー流れとは土の中を平均的に流れるものと仮定するとしていたが, 実際の水の流れは「流れやすい場所, 経路」を選択的に流れてゆくの
で, 透水性を求めるために対象とする領域を大きくとればとるほど, 求められる透水係数は大きくなる傾向がある。そのため, 原位置で計測する透水係数の方が, 改めて室内で計測する透水係数よりも, 小さい場合が多い。しかし, 原位置の地盤は不均質であり, かつ, その不均質さを完全に把握することには限界があるので, 計測された透水係数がどこまで信頼性があるのかも不明な点も多い。一方, 室内透水試験においては, 計測精度は高いものの, 上記のように実際の地盤内よりも小さめの透水係数を与えていることを知っておく必要がある。

ここでは, 室内透水係数について説明する。原位置透水試験については, 土中の水理の最後の「井戸」の理論の中で説明する。

(2) 室内透水試験の種類

室内で透水係数を求めるための試験には以下のものがある。

・定水位透水試験	礫質土, 砂質土	k 大	$10^{-1} \sim 10^{-3}(\text{cm/s})$	} 室内透水試験
・変水位透水試験	シルト質土, 粘性土	k 小	$10^{-3} \sim 10^{-7}(\text{cm/s})$	
(・圧密試験)	粘性土	k (極) 小	$10^{-6} \sim 10^{-9}(\text{cm/s})$	

上の試験から順に, 対象とする土の透水性が大きいものに適用される。通常は室内透水試験と言えば, 定水位透水試験と変水位透水試験の 2 つのこと言う。圧密試験については, 「土中の水理」の次の「土の圧縮特性」で学ぶ。圧密試験では変水透水試験でも透水係数が得られないような透水性の小さな地盤材料 (例えば, 均質な粘土) の透水係数を求めることができるが, あくまで土の圧縮性を計測する試験で副次的に得られるものであり, 得られる透水係数の計測誤差も比較的大きいことに注意する。

(3) 定水位透水試験

定水位透水試験では, 右のような試験機を使うが, 比較的透水性の高い土を対象とするため, 水位が常に一定となるように, 左側のパイプの水はオーバーフローさせておく必要がある。土中を通過して右側のパイプから溢れだしてきた水は, メスシリンダーによってその量を計測する。

以下に定水位透水試験により透水係数 k を求める手順について説明する。

土中の動水勾配 i は $i = h/L$ であるので, 流速 v は

$$v = ki = k \frac{h}{L} \quad (1)$$

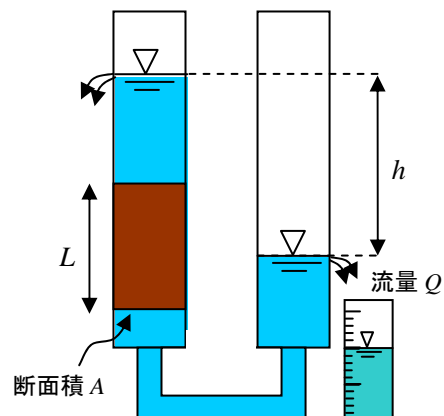


図 3 定水位透水試験

となる。したがって、時間 t の間に土中を通過する水の流量 Q は、土柱の断面積 A を用いて以下のように表すことができる。

$$Q = v \cdot A \cdot t = k \frac{h}{L} \cdot A \cdot t \quad (2)$$

以上より、流量 Q がメスシリンダーによって計測できる量であれば、この土の透水係数 k は

$$k = \frac{QL}{hAt} \quad (3)$$

となる。これは、透水性が高いために、 Q が計測できることが前提となっている。

(4) 定水位透水試験

透水性が低いために、流量 Q が計測できない（どれだけ長く計測しても、ほとんど流量が増えない）ような土の透水係数を求める試験である。

左側のパイプでのオーバーフローはやめて、その代わりに細いスタンドパイプを用いる。

微小時間 dt の間に土を通過する流量 dQ は、式(1)を参考にして以下のようになる。

$$dQ = v \cdot A \cdot dt = k \frac{h}{L} \cdot A \cdot dt \quad (4)$$

一方、同じ微小時間 dt の間にスタンドパイプ内を低下する水の量は、スタンドパイプの断面積 a を用いて、

$$-a \cdot dh \quad (5)$$

となる。マイナス符号が付いているのは、 dt との整合性からであり、以下の関係を見れば明らかである。

$$\text{初期状態} \quad t = t_1, \quad h = h_1$$

$$\text{微小時間後} \quad t = t_2 = t_1 + dt, \quad h = h_2 = h_1 - dh$$

連続条件（連続式）より、式(4)と式(5)を等値すれば、次式の微分方程式が得られる。

$$-a \cdot dh = k \frac{hA}{L} \cdot dt \quad \rightarrow \quad -a \cdot \frac{dh}{h} = k \frac{A}{L} \cdot dt \quad (6)$$

両辺を積分して、 $t = t_1$ の時 $h = h_1$ 、 $t = t_2$ の時 $h = h_2$ という条件を使用すると、以下のようになる。

$$-\int_{h_1}^{h_2} a \cdot \frac{dh}{h} = \int_{t_1}^{t_2} k \frac{A}{L} \cdot dt \quad (7)$$

$$-a \ln \frac{h_2}{h_1} = \frac{kA}{L} (t_2 - t_1) \quad (8)$$

したがって、透水係数 k は

$$k = \frac{aL}{A(t_2 - t_1)} \ln \frac{h_1}{h_2} = \frac{2.303aL}{A(t_2 - t_1)} \log_{10} \frac{h_1}{h_2} \quad (9)$$

となる。

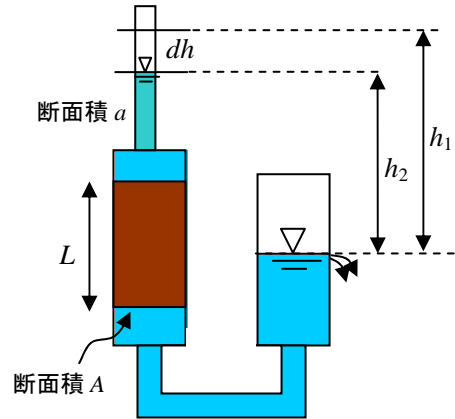


図4 変水位透水試験

【2 次元浸透解析】

(1) ラプラスの式

一次元浸透場と同様に、土の圧縮性は無視することとし、領域内での水の流出入はないものとする。この場合の多次元浸透場での連続式は $\text{div} \mathbf{v} = 0$ となる。成分表示すると

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix}$ は、ダルシー則に従い、 $V_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$, $V_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}$, $V_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$

ここに、 h は全水頭である。透水係数が流れる方向や地盤の深さに依存せずに全領域で等しく一定* ($k = k_x = k_y = k_z = \text{const.}$) と仮定すれば、ダルシー則を式(1)に代入することにより、次式のラプラスの式を得る。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

注: 実際の地盤内では、透水係数は流れの方向に依存する場合が多く、通常では水平方向の方が鉛直方向よりも透水性は高い場合が多い (後述)。また、同じ地盤材料で構成された均一な地盤であっても、深い方が密 (間隙比が小) になっている場合が多く、その場合には透水性が低くなっている場合がある。

(2) ポテンシャルと流れ関数

以下、簡単のため 2 次元で議論することとし、次式のラプラス方程式で表される最も理想化した 2 次元定常浸透問題を考える。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

関数 $f(w) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ を考える。ただし、 $w = x + iy$ (複素数) である。

関数 $f(w)$ が正則、すなわち微分可能であるための必要十分条件は、コーシー・リーマンの関係式より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4)$$

である。便宜上、複素数を使っているが、要するに、 $\Phi(x, y)$ と $\Psi(x, y)$ の 2 変数関数がそれぞれ、どのような経路で (x, y) に近づけた時にも、それぞれ同じ値に収束することを意味する。

ここで、 $\Phi(x, y)$ と $\Psi(x, y)$ にそれぞれ、次式を適用すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6)$$

となり、 $\Phi(x, y)$ も $\Psi(x, y)$ もラプラスの式を満たすことがわかる。

式(3)より全水頭 h はラプラスの式を満たすポテンシャルであるので、式(5)と見比べて Φ は h に等しいと仮定する。ではその場合、 Ψ はどのような性質を持つ関数となるのか考察する。

Ψ の全微分を考えると、

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy = -\frac{\partial h}{\partial y} dx + \frac{\partial h}{\partial x} dy = \frac{1}{k}(V_y dx - V_x dy) \quad (7)$$

となる。 $\Psi = \text{const.}$ 上では、 $d\Psi = 0$ となるので、

$$(V_x dx - V_y dy)_{\Psi=\text{const.}} = 0 \quad \text{すなわち、} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}} = \frac{V_y}{V_x} \quad (8)$$

上式は、 $\Psi = \text{const.}$ の線の接線 dy/dx が V_y/V_x に等しいことを意味しており、 $\Psi = \text{const.}$ 線が流線そのものであることを示す。ここで、 Ψ を流れ関数と呼ぶことにする。

一方、 Φ の全微分を考えると、

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = \frac{1}{k}(-V_x dx - V_y dy) \quad (9)$$

となるので、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} = -\frac{V_x}{V_y} \quad (10)$$

となる。

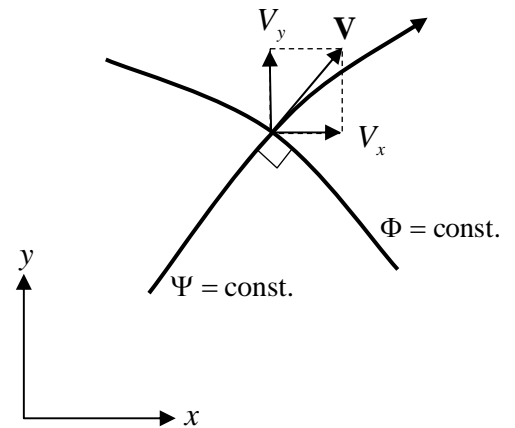
したがって、等ポテンシャル線 $\Phi = \text{const.}$ の接線の勾配

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} \quad \text{と流線} \Psi = \text{const.} \text{ の接線の勾配} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}}$$

を掛け合わせると、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}} = -1$$

となり、お互いは直交することがわかる。



(3) フローネット（流線網）解析

今までの議論により、等ポテンシャル線（ $\Phi = \text{const.}$ ）と流線（ $\Psi = \text{const.}$ ）が直交することがわかった。この性質を用いて、等ポテンシャル線と流線を網目状に描いて浸透解析をすることがある。この網目図のことをフローネット（流線網）と呼び、それを用いた図式浸透解析をフローネット解析と言う。

フローネットは以下の5点の性質を持つ。

フローネットの性質

- ①等ポテンシャル線と流線は直交する。
 - ②各流管（流線と流線の間）を流れる流量は等しい。
 - ③各等ポテンシャル線間の水頭の損失量は等しい。
 - ④等ポテンシャル線間の間隔と流線間の間隔の比は一定とする。
 - ⑤不透水層（面）に接する線は1つの流線となり、大気に接する線は1つの等ポテンシャル線となる。
- 特に、④において、等ポテンシャル線間と流線間の間隔が等しいものを**正方形フローネット**と呼ぶ。通常はこの正方形フローネットを用いる。正方形というのは、間隔が等しいという位の意味合いであり、ネットが本当に正方形になっている必要はない。

(4) 正方形フローネットの特長

地盤内が等方的な浸透場と仮定できるときに、正方形フローネット解析は威力を発揮する。図解法として優れた点を以下に説明する。

右図のようにいくつかの流管（流線で挟まれた領域）の中で、まず流管 A に着目する。

流線と等ポテンシャル線で囲まれた領域 1 での流速 v_1 は、次式となる。

$$v_1 = k \frac{\Delta h_1}{d_1} \quad (1)$$

ここに、 Δh_1 は領域 1 を囲む等ポテンシャル線間での水頭損失であり、 d_1 は領域 1 での内接円の直径（すなわち正方形の 1 辺）である。これより、領域 1 を単位時間、単位奥行きあたりに流れる流量 Q_1 は、

$$Q_1 = v_1 \cdot d_1 = k \frac{\Delta h_1}{d_1} \cdot d_1 = k \Delta h_1 \quad (2)$$

となる。同様に、領域 2 を流れる単位時間、単位奥行きあたりに流れる流量 Q_2 は、

$$Q_2 = v_2 \cdot d_2 = k \frac{\Delta h_2}{d_2} \cdot d_2 = k \Delta h_2 \quad (3)$$

となり、式(2),(3)より、流管内を流れる流量は、正方形フローネットを仮定する限りは、流管の幅を気にしなくても良いことがわかる。

さらに、領域 1 と領域 2 は同じ流管内にあることから、連続条件すなわち、 $Q_1 = Q_2$ を満たす必要がある。したがって、式(2)と式(3)を等値することにより、

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 \quad (4)$$

となり、等ポテンシャル線間での水頭損失は、正方形フローネットを仮定する限りは、どこでも等しいことがわかる。

さて、別の流管 B 内にある領域 3 に着目する。流量 Q_3 は、

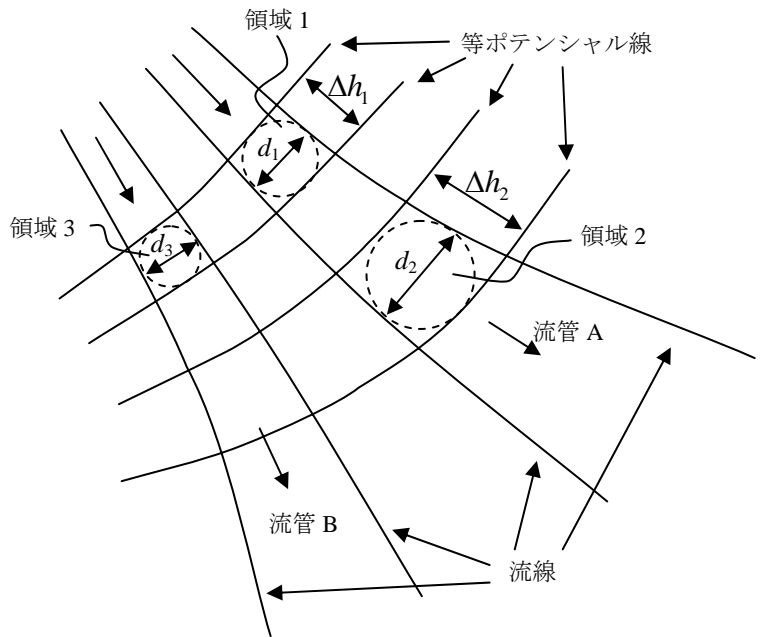
$$Q_3 = v_3 \cdot d_3 = k \frac{\Delta h_1}{d_3} \cdot d_3 = k \Delta h_1 = Q_1 \quad (5)$$

となり、結局、正方形フローネットを仮定する限りは、どの流管の流量も等しいことがわかる。

以上のように、正方形フローネットは複雑なことを考える必要が無く描きやすい上に、極めて合理的に浸透解析ができる特長を持つ。

最終的に、境界内における総流量 Q は、総流管数 N_f を用いて次式となる。

$$Q = \sum_{n=1}^{N_f} Q_i = N_f \cdot \Delta Q \quad (6)$$



各流管における流量 ΔQ ($= Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{N_f}$) は、等ポテンシャル線で区切られた区間数 N_d を用いて、

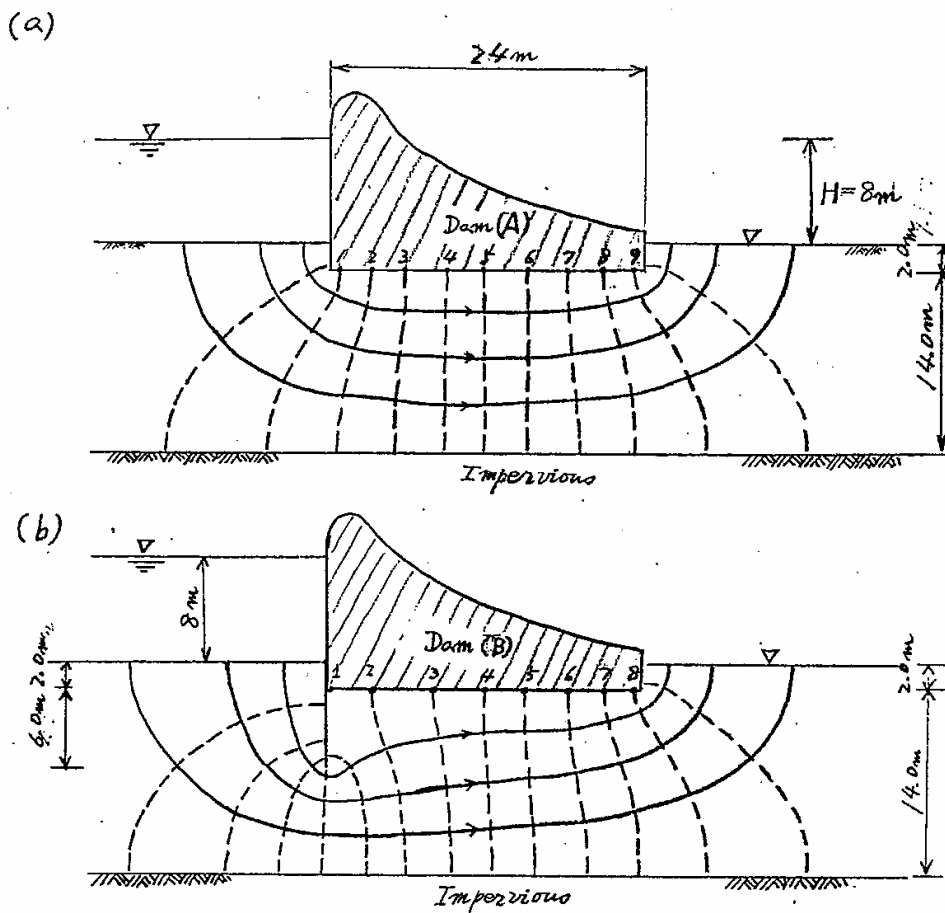
$$\Delta Q = k\Delta h = k \frac{H}{N_d} \quad (7)$$

となる。式(7)を式(8)に代入して、最終的に総流量は次式で表すことができる。

$$Q = kh \frac{N_f}{N_d} \quad (8)$$

(5) コンクリート重力式ダムフローネット

下の各図に示すフローネットを用いて、透水量とダム底面に作用する揚圧力（水圧）を求めてみよう。



【2次元場でのクイックサンド現象】

(1) 2次元浸透破壊実験によるクイックサンドの観察

図 1 は矢板と呼ぶ仕切り板を砂地盤の中央に立てて、左側の水位だけを上昇させて 2 次元浸透場を観察するための装置である。(フローネットの描き方を練習したお馴染みの条件)。矢板を挟んで左右の水位差がそれほど大きくない時は、左から右に流れる浸透場が現れるだけであるが、水位差が開きすぎると、1次元問題と同様に、やがてクイックサンドを起こす。実際に観察した写真を図 2 に示す。

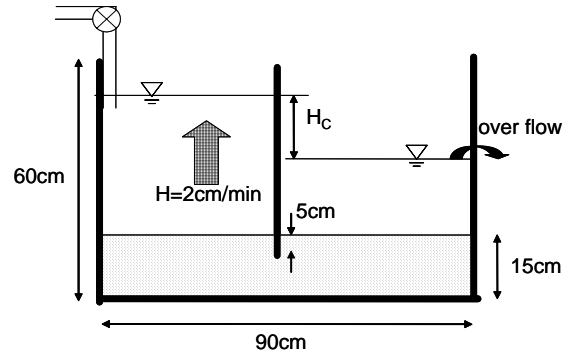


図 1 2次元浸透模型

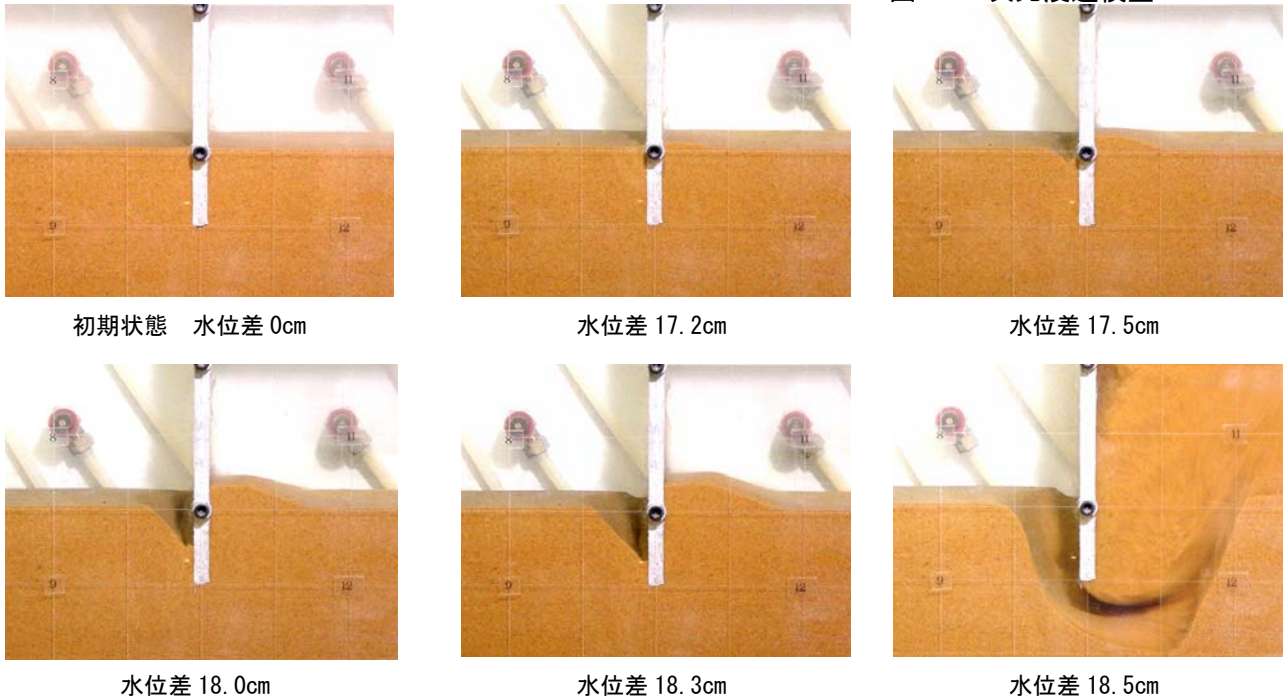


図 2 2次元浸透場での実際のクイックサンド現象

水位差 17.2cm で矢板左側の砂がわずかに隆起しはじめてから、左右の変形が進行し、水位差が 18.5cm になった時に、完全に砂地盤が液体状に破壊してしまった。これが典型的なクイックサンド現象である。また、破壊時には液体状に砂地盤が吹き上がり、水が沸騰するように見えるので、ボイリングとも呼ぶ。

(2) 2次元場でのクイックサンド現象の安定性の検討

(a) 一次元的な検討方法

図 2 の問題における安定性を限界動水勾配の概念を用いて検討する。まず単純に、動水勾配が最も大きくなる部分で 1 次元的に安定性の検討を行う。

動水勾配は、「全水頭の増分」を「地盤内の流線の長さ」で割って求められる。この問題での最も流線が短い部分は、矢板に沿った部分 (図 3 中の矢印で示したところ) であり、矢板の根入れ長が 5cm、矢板の厚さが 1cm とすれば、最も短い流線の長さは、 $5+1+5=11\text{cm}$ となる。

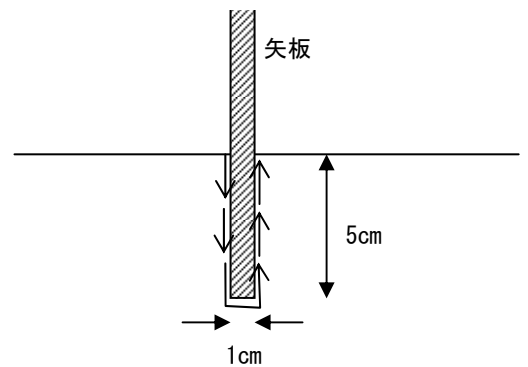


図 3

また、地表面は等ポテンシャル (全水頭) 線であるので、全水頭の増分は、矢板を挟んだ左右の水位差 ΔH

に等しい。したがって、この問題で、最も大きい動水勾配は $i = \Delta H / 11$ となる。

この動水勾配が限界動水勾配になるときの ΔH を具体的に計算してみる。

図 2 に示した実験に用いた砂は、比重 $G_s = 2.7$ 、間隙比 $e = 0.8$ である。したがって、限界動水勾配 i_c は、

$$i_c = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{2.7 - 1}{1 + 0.8} = \frac{1.7}{1.8} = 0.94$$

最も大きな限界動水勾配 $i = \Delta H / 11$ が i_c に等しかったとして、

$$\Delta H / 11 = 9.4 \quad \therefore \Delta H = 10.3 \text{ cm}$$

実際に破壊した水位が約 18cm であったことを考えると、この検討方法はかなり安全側の検討であることがわかる。実際の地盤の条件（間隙比や土の均一性等）はかなり不確実なものであり、かつこの検討法が簡単かつ必ず安全側にあることから、実務では第一の検討法として、この手法が用いられることがある。

(b) Terzaghi (テルツァギ) の検討方法

(a) で示した方法はいくら安全側とはいえ、現実の限界水位差とはかなり隔たりがあった、その理由は、図 2 の写真でも示されているように、クイックサンドの発生時には、矢板に沿った地盤だけが壊れるのではなく、矢板からある程度の幅を持った塊が変形して破壊するからである。Terzaghi は実際の破壊領域に着目して、破壊の影響範囲を図 4 に示すように、矢板の根入れの半分の幅と定め、その領域の土塊とその下端に働く水圧との釣り合いを検討することにより、2 次元浸透破壊の安定性を検討した。

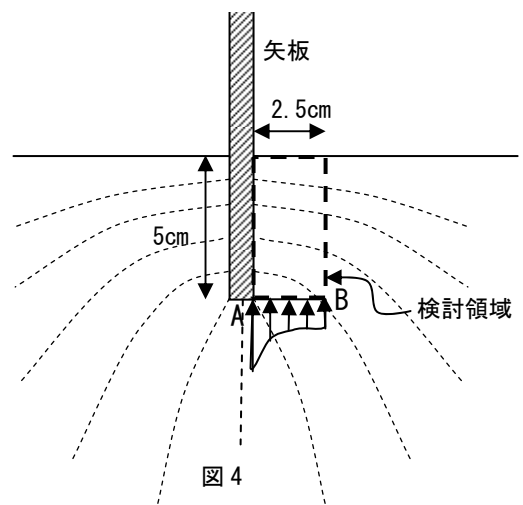


図 4 のように等ポテンシャル線があると仮定する。安定性を検討する領域の下端の A 点および B 点での間隙水圧は、水位差 ΔH を用いて、それぞれ、

$$A \text{ 点} : \frac{5}{12} \Delta H \cdot \gamma_w, \quad B \text{ 点} : \frac{4}{12} \Delta H \cdot \gamma_w$$

A 点から B 点へ実際の間隙水圧の分布形は図 4 に示すような曲線になるが、簡単のため直線分布と仮定する。その時、検討領域の下側から作用する間隙水圧の増分^{注)}の合力は、

$$\frac{9}{24} \times 2.5 \Delta H \cdot \gamma_w = 0.938 \Delta H \cdot \gamma_w \quad \text{注) 矢板を挟んでの水位差は、静水圧からの増分の水圧となる。}$$

となる。一方、検討領域の水中重量^{注)}は、

$$5 \times 2.5 \times \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = 5 \times 2.5 \times \frac{2.7 - 1}{1 + 0.8} \gamma_w = 11.81 \cdot \gamma_w$$

となる。注) 力の釣り合いを考える際に、間隙水圧が静水圧からの増分で考えているために、ここでは、水中単位体積重量を用いて計算する。

最終的に、上の 2 つの式の釣り合いを考えると、

$$0.938 \Delta H \cdot \gamma_w = 11.81 \gamma_w \quad \therefore \Delta H = 12.59 \text{ cm}$$

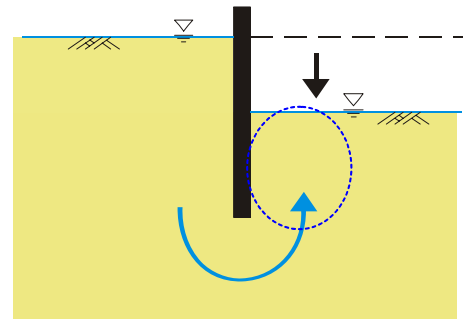
となり、(a) の 1 次元的な検討よりも多少は、実際の値に近づく。

そうであっても、まだまだ現実の値から少し遠いものには、砂の摩擦性材料の性質や、進行性破壊等、様々な複雑な要因がある。数値解析では、ある程度それら複雑な要因を取り入れて解析することができるために、より現実的な値を計算することが可能である。

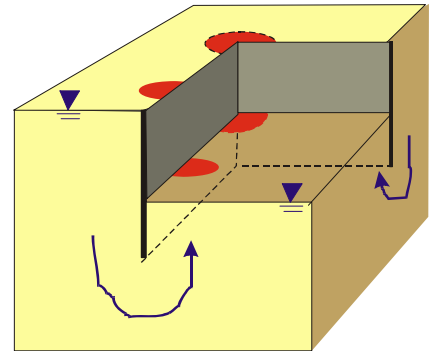
(3) 実務におけるクイックサンド現象の例

実際の土木施工の現場でクイックサンドが問題になるのは、今までの例と同様に、矢板を挟んで水位差がついてしまうことにより、左右いずれかだけに上向きの浸透流が発生し、土を押し上げて壊してしまうことによる。実務では、その水位差が付く状態は、図 5 のように、矢板を地盤に打ち込んでから、地盤を掘削工事する際によく現れる。図 5(a)に示すように、矢板右側を掘削する場合、掘削面まで地下水を抜いてドライにすることが多い。その際、左右には大きく水位差がつくことになる。

また、実際の施工は、図 5(b)に示すように、3次元であり、建物の基礎を建設するような場合には、図のような掘削をすることが頻繁にある。その場合、2次元のように全体的にクイックサンドが発生する場合ばかりではなく、図に示すような隅角部や局所的に弱い部分だけが浸透破壊することが多い。このような、局所的なクイックサンドをパイピングと呼ぶ。パイピングは、はじめは局所的なものであるが、すぐに地盤全体の破壊も引き起こすことがほとんどで、非常に危険な現象である。



(a) 2次元の掘削



(b) 3次元の掘削

図 5 掘削に伴うクイックサンド

(4) 実務におけるクイックサンド現象の実例（東京湾アクアライン建設工事中的出水事故）

東京湾アクアライン（当時：東京湾横断道）

工事：1989～1997

川崎人工島（現：風の塔）：直径 193m, 掘削深度海面下 70m（水深 28m, 海底面から 42m）

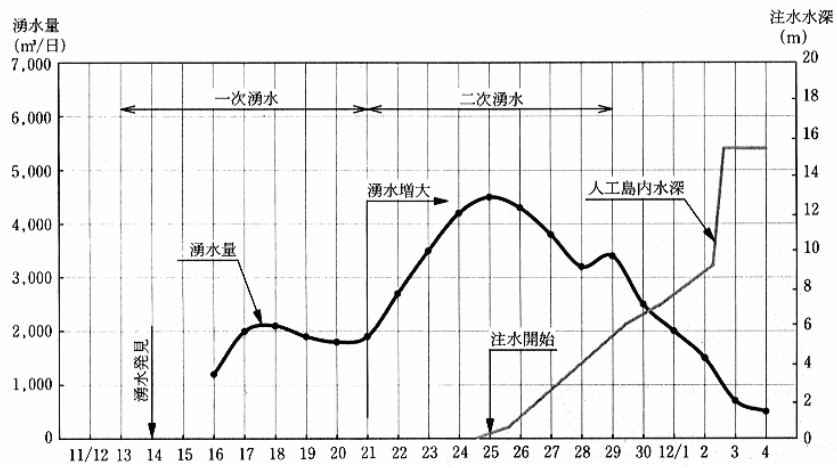
ディープウェルにて 10,000t/日汲み上げ

出水状況：最大約 5,000t/日（1993.11.24）



↑ 出水当初の状況 厚さ 50cm のコンクリート盤の下に通した水抜きパイプから 2,000t/日の湧水

←底面まで掘削が進行したところ



出水と人工島内の水位の状況



海水投入の状況



注水により水位が落ち着いた状況



現在の川崎人工島（風の塔）：海底トンネルの排気口となっている
（建設時にはシールドの発進基地として使用）

【定常浸透場での浸潤面と井戸】

(1) 浸潤面における Dupuit (デュピ) の仮定

図 1 に示すように、不透水面 $z=0$ と浸潤面 $z=h(x)$ の間を流れる地盤内の地下水の流れ場を考える。A 点から B 点への地下水の流れは、

$$\mathbf{v} = -k \frac{\Delta h}{\Delta s} \quad (1)$$

となる。ただし、 \mathbf{v} と \mathbf{s} は A→B に沿ったベクトル量である。ここで、 $h(x)$ の勾配が非常に緩やかであったと仮定すると、 $\Delta \mathbf{s} \approx \Delta x$ とみなせる。また、浸潤面においては、全水頭と位置水頭は同じであるので、 $\Delta h \approx \Delta z$ とみなせる。結局、式(1)は、

$$v_x \approx -k \frac{\Delta z}{\Delta x} = -k \frac{dz}{dx}, \quad v_z \approx 0 \quad (2)$$

となる。これをデュピの仮定と言う。普通は x 成分のみを書く。

$$v \approx -k \frac{dz}{dx} \quad (3)$$

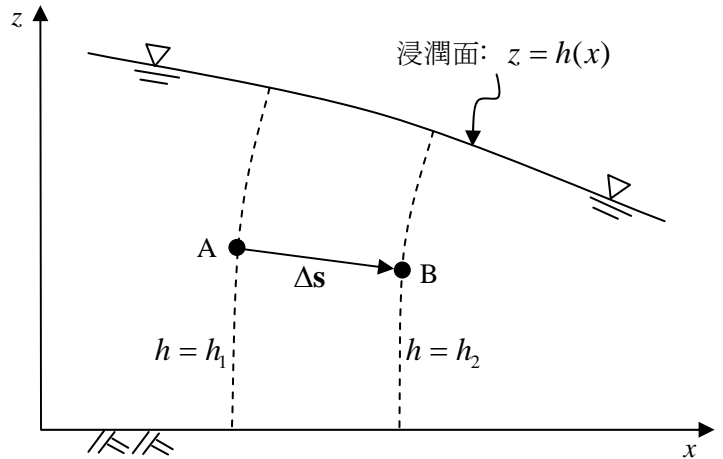


図 1 浸潤面 (自由水面) と等ポテンシャル面

(2) 締切堤の浸潤面と流量解析

図 2 に示す幅 B の締切堤の浸潤面を考える。単位時間、単位奥行きあたりの流量 Q は、

$$Q = v \cdot z = -kz \frac{dz}{dx} \quad (4)$$

したがって、 $Qdx = -kzdz$

流量一定の連続条件が成り立つ時に、この微分方程式は積分することができ、

$$Qx = -\frac{1}{2}kz^2 + C \quad C: \text{積分定数} \quad (5)$$

Q が一定であるので、浸潤面 $z = h(x)$ は放物線となることがわかる。境界条件を入れると、

$$x=0 \text{ で } z=H_1 \text{ より, } C = \frac{1}{2}kH_1^2$$

$$x=B \text{ で } z=H_2 \text{ より, } QB = -\frac{1}{2}kH_2^2 + C$$

したがって、最終的に締切堤の単位時間、単位奥行きあたりの流量は以下ようになる。

$$Q = \frac{k}{2B}(H_1^2 - H_2^2) \quad (6)$$

ここでは $H_1 > H_2$ であるために Q の符号は正であるので、正の方向に流れていることがわかる。

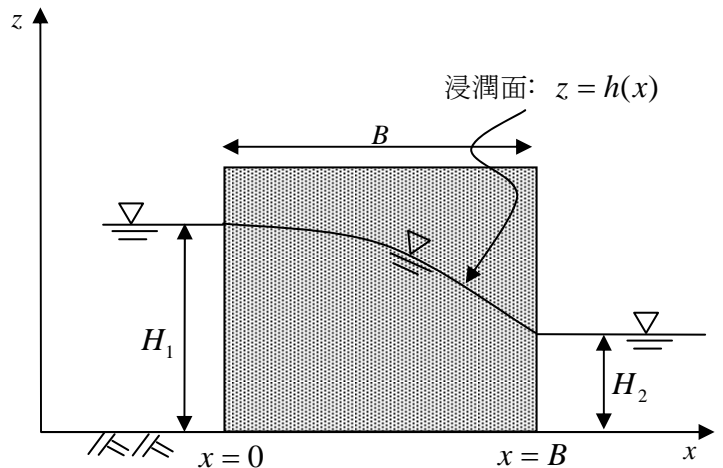


図 2 締切堤の浸潤面

(2) アースダム（台形断面堤防）の浸潤面と流量解析

図3に示すアースダムの浸潤面を考える。ここでは、座標の取り方の便宜上、水は x の負の方向に流れることとする。ここでは、主に浸潤面が堤防法面のどの位置に現れるのか（浸出点の位置）と流量について考察する。

単位時間、単位奥行きあたりの流量 Q は、締切堤と同様に式(4)の微分方程式で表される。したがって、式(4)を再掲して、

$$Q = -kz \frac{dz}{dx} \quad (7)$$

浸出側のB点から左側の法面も浸潤面の1つであるので、その位置においては、

$$\frac{dz}{dx} = \tan \beta \quad (8)$$

が成り立っている。また、B点においては、 z と λ には以下の関係が成り立つ。

$$z = \lambda \sin \beta \quad (9)$$

式(8)、(9)を式(7)に代入して、次式を得る。

$$Q = -k\lambda \sin \beta \tan \beta \quad (10)$$

一方、式(7)をそのまま積分した、放物線である浸潤面の式(5)を再掲すると、

$$Qx = -\frac{1}{2}kz^2 + C \quad C: \text{積分定数} \quad (11)$$

となるが、これにA点とB点における以下の境界条件を適用する。

A点： $x = L$ で $z = H$ より、

$$QL = -\frac{1}{2}kH^2 + C \quad (12)$$

B点： $x = \lambda \cos \beta$ で $z = \lambda \sin \beta$ より、

$$Q\lambda \cos \beta = -\frac{1}{2}k\lambda^2 \sin^2 \beta + C \quad (13)$$

式(13)に式(10)を代入する。

$$-k\lambda^2 \sin \beta \cos \beta \tan \beta = -\frac{1}{2}k\lambda^2 \cos^2 \beta + C$$

$$-k\lambda^2 \sin^2 \beta = -\frac{1}{2}k\lambda^2 \cos^2 \beta + C$$

$$\therefore C = -\frac{1}{2}k\lambda^2 \sin^2 \beta \quad (14)$$

式(12)に式(14)と式(10)を代入すると、

$$(-k\lambda \sin \beta \tan \beta)L = -\frac{1}{2}kH^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2 \sin^2 \beta$$

$$(\lambda \sin \beta \tan \beta)L = \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \beta$$

となり、 λ で整理すると、最終的に、 λ に関する以下の2次方程式となる。

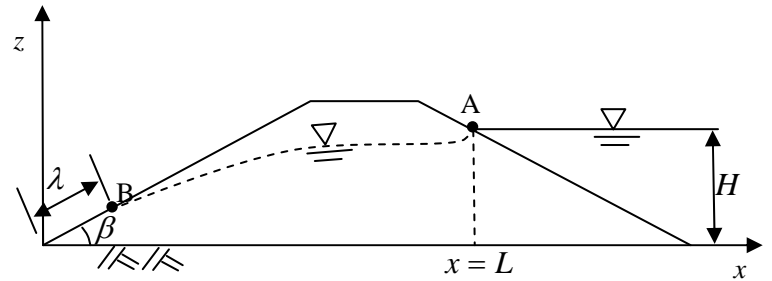


図3 アースダムの浸潤線

$$\lambda^2 - \frac{2L}{\cos \beta} \lambda + \frac{H^2}{\sin^2 \beta} = 0 \quad (15)$$

これを解けば、

$$\lambda = \frac{L}{\cos \beta} \pm \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2 \beta} - \frac{H^2}{\sin^2 \beta}}$$

したがって、実際にあり得る解を選択すると、浸出点の位置 λ は

$$\lambda = \frac{L}{\cos \beta} - \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2 \beta} - \frac{H^2}{\sin^2 \beta}} \quad (16)$$

となり、 λ は透水係数 k には依存せず、浸出側の法面の勾配 β や水面の境界条件 H と L のみによって決まることがわかる。

最終的に、このアースダムの単位奥行きあたりの流量は、式(16)を式(10)に代入して、

$$Q = -k \left(\frac{L}{\cos \beta} - \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2 \beta} - \frac{H^2}{\sin^2 \beta}} \right) \sin \beta \tan \beta \quad (17)$$

と得られる。

注意： Q の符号は負であるが、これは x 座標の負の方向の流れの流量を表している。したがって、単に流量はいくらかと聞かれる場合には、負号をとって、

$$Q = k \left(\frac{L}{\cos \beta} - \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2 \beta} - \frac{H^2}{\sin^2 \beta}} \right) \sin \beta \tan \beta \quad (18)$$

と答えた方が良い場合もある。このように、はじめの設定から明らかに x 座標の負の方向の流れを考えている場合には、式(7)の微分方程式の段階から負号を取って絶対値で考えても良い。教科書では井戸の説明においてはそのように書かれているが、以下の説明ではあえて負号を付けたまま書くので、注意すること。

(3) 井戸の定常問題 (重力井戸)

図4に示すように、不透水層の上に地下水が流れやすい砂層が堆積していたとする。その地盤に井戸を掘り (図4中央)、流量 Q で水を汲み上げ続ける。図に示す半径 R よりも外側の領域から水がどんどん供給される場合には、十分に時間が経過した後は、時間に伴う変化がなくなる定常状態に落ち着く。

重力井戸の場合には、地下水面 (浸潤面) の形は重力の作用によって自由に変化する。この浸潤面の形を決めるのに、デュピの仮定を用いる。すなわち、

$$Q = -2\pi r \cdot k \cdot h \frac{dh}{dr} \quad (19)$$

ただし、井戸を中心とした軸対称条件であるので、全領域の総計を考えるために、 2π がかけられている。

式(19)を変形すると次式となる。

$$Q \frac{dr}{r} = -2\pi k h dh \quad (20)$$

Q は r によらず一定なので、上式は積分できて

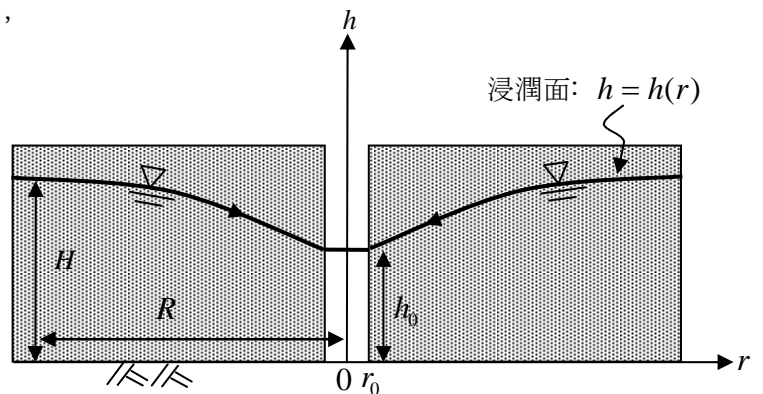


図4 重力井戸の定常問題

$$Q \ln r = -\pi k h^2 + C \quad (21)$$

となる。これに境界条件

$$\begin{cases} r = r_0 \text{ で } h = h_0 \\ r = R \text{ で } h = H \end{cases} \quad r_0 : \text{揚水井戸の半径}$$

を適用すると、 $Q \ln(R/r_0) = -\pi k(H^2 - h_0^2)$ となり、結局、次式となる。

$$Q = -\frac{\pi k(H^2 - h_0^2)}{\ln(R/r_0)} \quad (22)$$

負号は、 x 座標の負の方向の流れ、すなわち井戸の中心に向かう流れを表しており、井戸の「揚水量」はと聞かれば、絶対値である以下の流量となる。

$$Q = \frac{\pi k(H^2 - h_0^2)}{\ln(R/r_0)} \quad (23)$$

(4) 井戸の定常問題（掘り抜き井戸）

図5に示すように、井戸を掘った地盤の上部に難透水の粘土層があり、その下部には地下水が流れる砂層（滞水層）があるとする。その滞水層は水圧が加わった被圧水層であるとする。

滞水層の全水頭分布（ここでは位置水頭が同じなので圧力水頭の勾配しかない）が外側に行くほど大きくなり、その勾配により井戸の中心に向かう流れが発生しているとすれば、ダルシー則を用いて流量 Q は、

$$Q = -2\pi r \cdot b \cdot k \frac{dh}{dr} \quad (24)$$

となる。重力井戸と異なり、ディピの仮定を用いているわけではないので、流路の高さは b 一定である。また、軸対称条件で地盤全領域を考えるために重力井戸と同様に $2\pi r$ をかけている。この式を変形して、

$$Q \frac{dr}{r} = -2\pi b k dh \quad (25)$$

Q は r によらず一定なので、上式は積分できて、

$$Q \ln r = -2\pi k b h + C \quad (26)$$

となる。これに以下の境界条件

$$\begin{cases} r = r_0 \text{ で } h = h_0 \\ r = R \text{ で } h = H \end{cases}$$

を適用すると、結局次式となる。

$$Q = -\frac{2\pi k b(H - h_0)}{\ln(R/r_0)} \quad (27)$$

負号は井戸の中心に向かう流れを表し、「揚水量」は負号をとって絶対値で答えればよい。

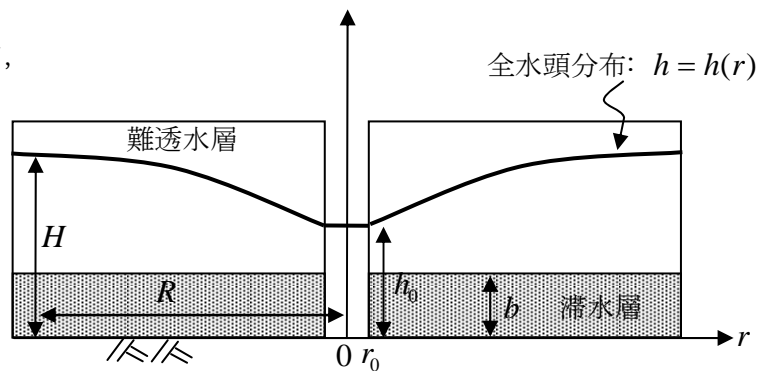


図5 掘り抜き井戸の定常問題

(5) 現場揚水試験（原位置透水試験）

実際の井戸において、揚水量 Q と観測用の井戸（観測井）での水位 H がわかれば、式(22)（または(23)）、(27)により透水係数 k を求めることができる。実際は誤差も多いため、1本の観測井ではなく、複数の観測井を用いて計測されることが多い。このように現場で計測される透水係数は、現場でサンプリングしてきた土を用いて室内の透水試験（配布資料 No.5 参照）で求めた透水係数よりも大きく計測されることが一般的である。