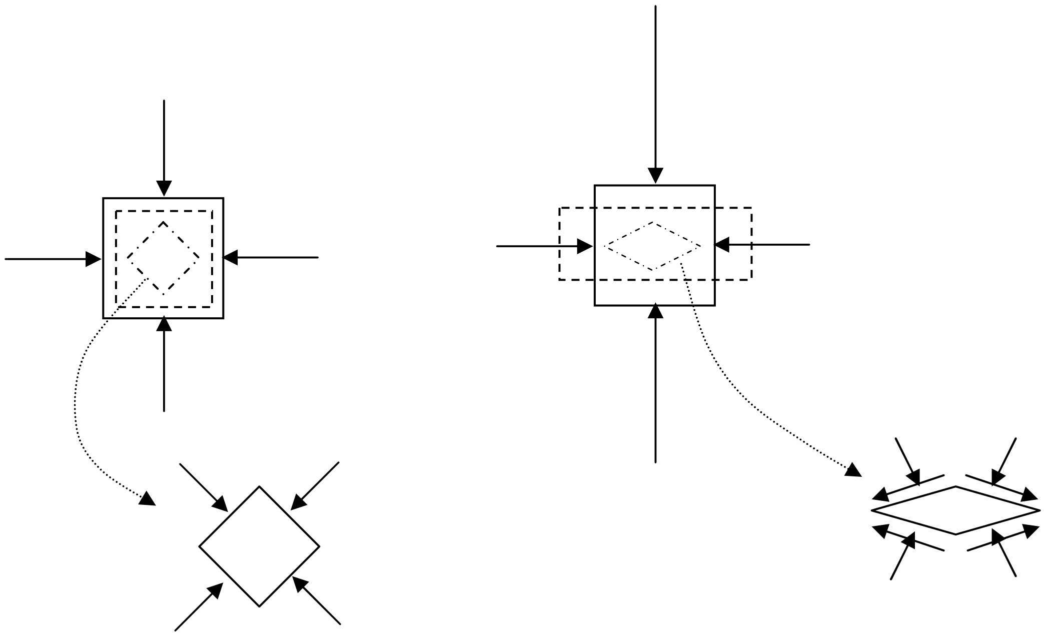
土質力学Ⅰ及び演習（B班：小高担当）　配付資料 No.10　(2005.12.20)

【多次元場での応力の表現】

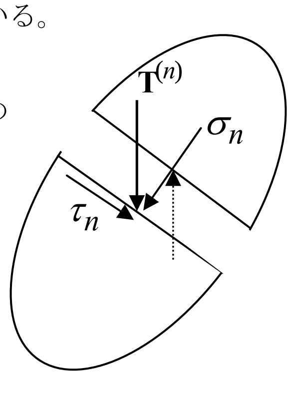
(1)せん断力

圧密理論では，1 次元しか考えていなかったので，応力の成分は σ だけで十分であった。しかし，土の強度と破壊を考える場合には，どうしても多次元での応力を導入する必要がある。物体が壊れるためには，必ず「ずらす，あるいは，ゆがめる」力（せん断力と呼ぶ）が働かなければならないが，その「せん断力」は，多次元場においてそれぞれ別方向から加わる力に差があることから生じているからである。例えば，下図のように，仮想的な小正方形要素に，鉛直と水平方向の力が働いている場合，両者が同じ大きさの力なら，等方的に圧縮するのみで，物体は決して壊れない。しかし，両者に差がある場合には，物体のある面には「ずらす，あるいは，ゆがめる」ような働きをするせん断力が働く。鉛直と水平方向の力の差があるレベルに達すると物体は破壊する。



(2)応力ベクトルとその成分

　応力とは単位面積あたりの力であるという説明があるが，それは応力の次元のことを言っているだけである。外力が作用しているある物体の微小要素を取り出してきて，その微小要素を 2 つに切断して，その切り口の n 面に着目する。その n 面には $\mathbf{T}^{(n)}$ という単位面積あたりの力が働いている。
この $\mathbf{T}^{(n)}$ を応力ベクトルと呼ぶ。ベクトル量なので向きと大きさが決まっている。
この応力ベクトル $\mathbf{T}^{(n)}$ は，通常，切り口の面に垂直な成分と切り口に沿った成分の 2 つ（3 次元なら切り口に沿った成分が 2 つで合計 3 つ）で表される。



$$\mathbf{T}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_n \end{Bmatrix}$$

σ_n を垂直応力と呼び，τ_n をせん断応力と呼ぶ。

これらは応力ベクトルの単なる成分であるので，スカラー量であるが，大抵の教科書では，図のように応力成分を表すのにも矢印を用いて，便宜的にベクトルのように表している場合が多い。しかし本来は，基底ベクトル $\mathbf{e}_{n1}, \mathbf{e}_{n2}$ を用いて，

$$\mathbf{T}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{e}_{n1} + \tau_n \mathbf{e}_{n2}$$

と書くべきであり，ベクトル量はあくまで $\sigma_n \mathbf{e}_{n1}, \tau_n \mathbf{e}_{n2}$ であることを理解しておく必要がある。

(3) 応力を表す座標系と応力テンソル

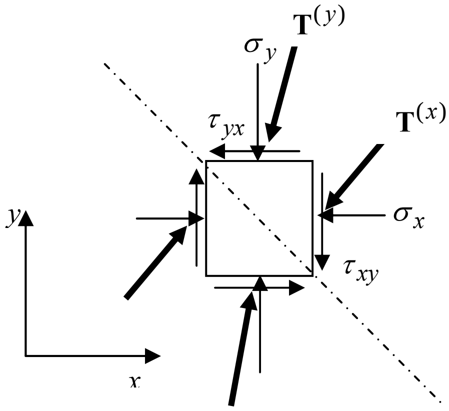
2 次元の物体内のある点での応力状態を表すとき，適当に定めた x，y 座標を用いると，x 軸と y 軸それぞれに垂直な切り口での 2 つの応力ベクトルを用いる。これを表すのに便宜上，右図が使われる。ほとんどの場合，応力ベクトルは省略されて，応力ベクトルの成分のみが描かれている場合が多い。

$$\mathbf{T}^{(x)} = \sigma_x \mathbf{e}_x + \tau_{xy} \mathbf{e}_y$$

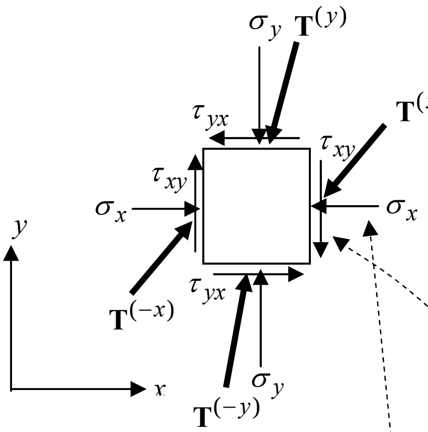
$$\mathbf{T}^{(y)} = \tau_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y$$

便宜上 $\begin{Bmatrix} \mathbf{T}^{(x)} \\ \mathbf{T}^{(y)} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix}$ のように演算を表すことができるが，上の $\boldsymbol{\sigma}$ を応力テンソルと呼ぶ。

（テンソルとは，行列で表されることからもわかるように，
一次変換の線形作用素であり，「ベクトルを掛けて，別のベクトルをつくる」
作用をする。したがって，ベクトルを掛けてみて，はじめて物理的な意味が
わかるものである。）

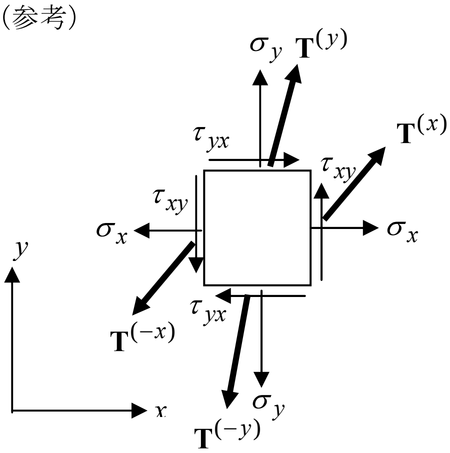


(4) 土質力学での座標系の定義



【土質力学】

（参考）



【一般的な力学】

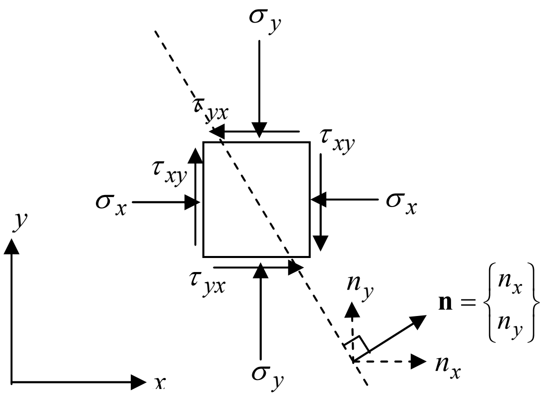
一般的な力学では，応力ベクトルは引っ張りを正にするのが普通である。しかし，引張力がほとんど期待できない「つぶつぶ」で構成されている材料（粒状体という）である土を扱う土質力学では，考慮すべき力（応力）のほとんどが圧縮であるので，垂直応力の向き（正確に言えば，応力ベクトルの垂直成分の向き）は圧縮が正となるようにするのが通例である。せん断応力の向きは，「垂直応力の符号に合わせる」ように決める。すなわち，垂直応力が x 軸のマイナスの向きなら，その面に作用するせん断応力も y 軸のマイナスの向きにする。

ここで，一般的な力学における応力の向きを見ると，すべての向きが逆になっているだけであり，そのため，以後の議論のほとんどは共通してできる。

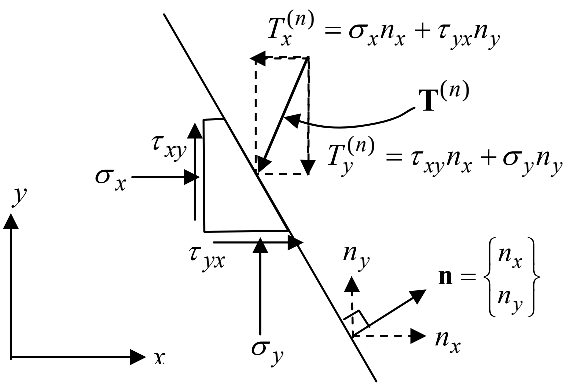
⑸コーシーの公式（応力テンソルから任意の面に作用する応力ベクトルを計算する式）

$$\mathbf{T}^{(n)}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}n_x\\ n_y\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}\mathbf{n}$$

応力テンソルに任意の面の法線ベクトルを掛けると，その面に作用する　応力ベクトルが得られる。

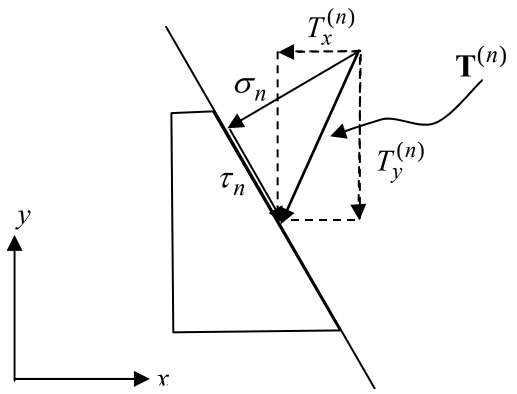


設定した xy 座標系ですべての垂直応力とせん断応力の成分が表される。



コーシーの公式で求められる応力ベクトルも元々設定した xy 座標系の成分で表される。

ただし，上図のように，応力ベクトルは設定した xy 座標系における x 成分と y 成分で表されるだけなので，応力ベクトルの作用面に対する垂直成分（垂直応力）σ_n と平行成分（せん断応力）τ_n の大きさを知りたい場合* には，別途，座標変換等の計算をする必要がある。



応力ベクトルを xy 座標系で表すのも大切だが，面に対しての垂直成分と平行成分の大きさを知ることはもっと重要である。

*なぜ，垂直応力とせん断応力の大きさをそんなに知りたがるのにはワケがあるが，そのワケは後でわかる（はず）。

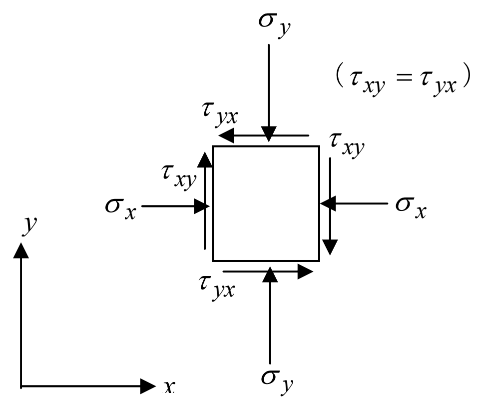
応力ベクトルに，xy 座標の基底ベクトル $\mathbf{e}_x=\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix},\mathbf{e}_y=\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}$ をそれぞれ作用させると，

$$\mathbf{T}^{(x)}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}\mathbf{e}_x=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix},\quad \mathbf{T}^{(y)}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}\mathbf{e}_y=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tau_{yx}\\ \sigma_y\end{Bmatrix} \qquad (1)$$

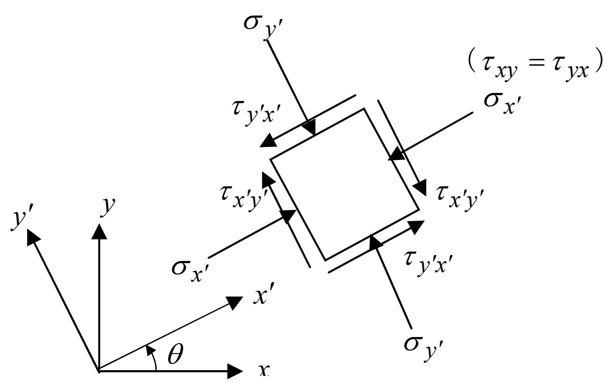
となり，x 面（x 軸に垂直な面）と y 面（y 軸に垂直な面）での応力の x 成分，y 成分がわかる。x 面においては，x 成分が垂直応力であり，y 成分がせん断応力であるが，y 面においては，x 成分がせん断応力であり，y 成分が垂直応力であることに注意する。

⑹座標変換

　任意の面の応力ベクトルがコーシーの公式で計算できても，それはあらかじめ決められた座標系での x 成分と y 成分がわかったに過ぎないので, その座標から傾いている面に作用している垂直応力とせん断応力は即座にわからない。しかし, 式(1)からもわかるように, 垂直応力とせん断応力を知りたいと思う面が, 座標系の x 方向か y 方向のいずれかに一致さえしていれば，即座にその値を知ることができる。
そのため，知りたい面に座標を合わせてやる。すなわち，座標変換を行う。



元の座標系



座標変換後

応力テンソルの座標変換について考察する。

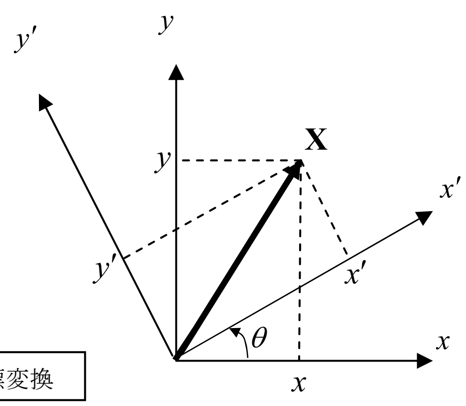
xy 座標系に対し，角度 θ だけ傾いた座標系 $x'y'$ を考える。空T間内にある任意のベクトル $\mathbf{X}$ を xy 座標系で表した座標が (x, y) であり， $x'y'$ 座標系で表した座標が (x', y') であったとすると，(x, y) と (x', y') の関係は，次式となる。

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

すなわち，

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2)$$

← ベクトルの座標変換



上式は，xy 座標系で観測していたベクトル量が，$x'y'$ 座標系ではどのように観測されるのかを表している。この見方を変える作業を座標変換と呼ぶ。特に，2 次元の直交座標どうしの変換は，回転で表すことができるので，視覚的にもわかりやすい。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおけば，このテンソルは $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$ となる直交テンソルである。

ここで，ある面での応力ベクトル考える。

回転前の座標系で表したものを $\mathbf{T}^{(n)}$，回転後の座標系で表したものを $\mathbf{T}^{(n')}$ とすると，

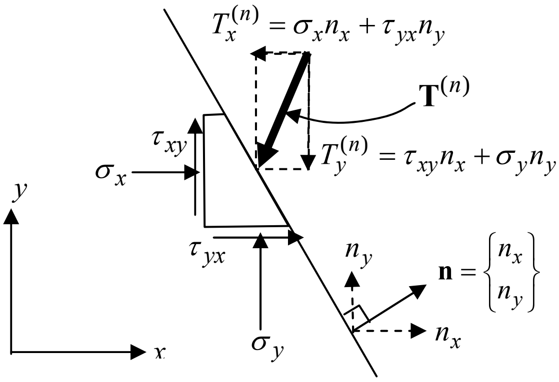
$$\mathbf{T}^{(n')} = \mathbf{Q}\mathbf{T}^{(n)} \quad (3)$$

← ベクトルの座標変換

となる。

一方，それぞれの座標系を用いてコーシーの公式を表すと，

$$\mathbf{T}^{(n')} = \boldsymbol{\sigma}'^{\mathbf{T}}\mathbf{n}' \quad \text{および} \quad \mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}\mathbf{n} \qquad (4)$$



となるので，これらを式(3)に代入すると，

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathbf{T}}\mathbf{n}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}\mathbf{n} \qquad (5)$$

となるが，式(3)にならい，$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}\mathbf{n}$ であるので，

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}\mathbf{n} \qquad (6)$$

となる。法線ベクトル $\mathbf{n}$ にかかるテンソル部分を比較すると，

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathbf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}} \qquad (7)$$

となり，結果として，xy 座標系で観測していた応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}$ を $x'y'$ 座標系で観測し $\boldsymbol{\sigma}'^{\mathbf{T}}$ は，

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \qquad (8)$$

となることがわかる。応力テンソルについては, 別途, $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}'^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma}'$（すなわち，$\tau_{xy} = \tau_{yx}$，$\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$）

であることが証明できるので，上式は

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \qquad (9)$$

← テンソルの座標変換

となる。（ただし，応力テンソルの対称性を用いるまでもなく，式(8)の両辺を転置すれば式(9)を得ることは自明だが，どうせ応力テンソルの対称性をこれ以降使用するので，先に導入しただけ）。

では，実際に応力テンソルに各成分を入れて計算してみる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$

計算すると，

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1+\cos 2\theta}{2}\sigma_x + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\sigma_y + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

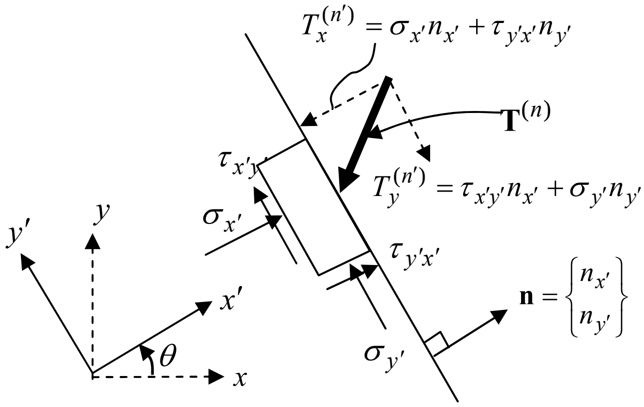
整理すると，

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (11)$$

同様に計算すると，

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (12)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (13)$$



同じ応力ベクトルを角度 θ だけ回転した座標で観測する
（物理的には応力ベクトルは何も変わらない）

となり角度 θ だけ回転した座標系で観測した応力テンソルの成分が求められる。

⑺ 座標変換とモールの応力円

式(11)を変形すると，

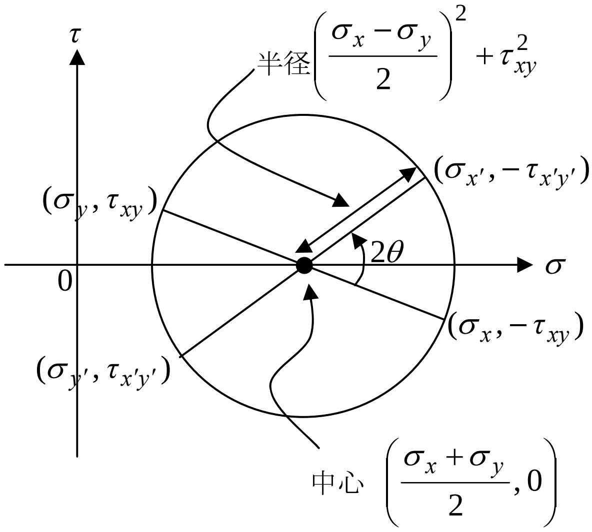
$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

この式の両辺を 2 乗すると

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + \tau_{xy}{}^2 \sin^2 2\theta + \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta \quad (14)$$

式(13)の両辺を 2 乗すると，

$$\tau_{x'y'}{}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta + \tau_{xy}{}^2 \cos^2 2\theta - \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta \quad (15)$$



式(14)と(15)を加えると，

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}{}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

結局，座標変換前後の応力状態は，常に右図のような円周上の点で表すことができる。円の中心と半径は，座標変換前の応力状態から決定される。

この円を，**モールの応力円**という。

⑻ 主応力と応力テンソルの固有値

物体内で応力ベクトルの作用面を回転してゆくと，ある面（とその直交する面）に作用する応力ベクトルは垂直成分しか持たず平行成分がない場合が必ず存在する。すなわち，その面にはたらくせん断応力はゼロで，垂直応力しか働いていない。この時の垂直応力を主応力と呼ぶ。また，主応力の働く面を主応力面と呼ぶ。ある主応力面に直交する面も必ず主応力面になっており，それぞれの面に働く主応力の大きい方を最大主応力と呼び，小さい方を最小主応力と呼ぶ。（最大，最小とわざわざ付けるのは，座標変換して得られる垂直応力の中でも，それら主応力が必ず最大値および最小値になるからである。）

では，主応力を実際に求めてみる。主応力面の法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすれば，その面での応力ベクトルは垂直成分しか持たないので， $\mathbf{n}$ のスカラー倍 $\lambda\mathbf{n}$ となる。すなわち，

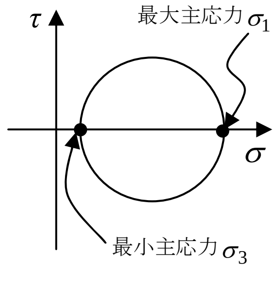
$\mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$ より，$\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{n} - \lambda\mathbf{n} = \mathbf{0}$　よって，$(\boldsymbol{\sigma}^T - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$　この式において，$\mathbf{n} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つためには，$|\boldsymbol{\sigma}^T - \lambda\mathbf{I}| = 0$ でなければならない。よって，

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = (\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy}{}^2 = 0$$

となり，この λ に関する 2 次方程式を解けば，

$$\lambda = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

← 言うまでもなく，モールの円の両端

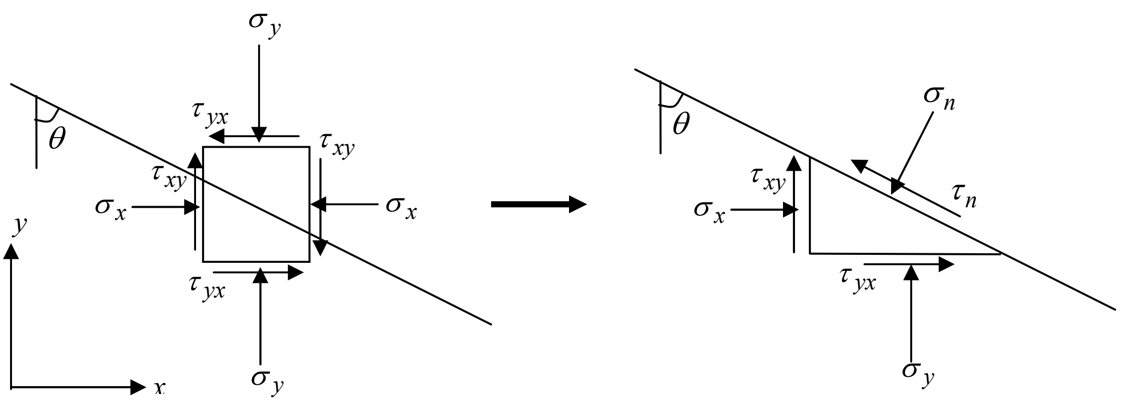


となり，λ の大きい方と小さい方が，それぞれ最大および最小主応力である。

以上の計算は，結局，応力テンソルの固有値を求めていることと同じである。

⑼ 力の釣り合いによる応力の座標変換の解法

この節は蛇足であると思われるが，念のため，微小土塊に働く応力ベクトルの成分から，任意の面に働く応力ベクトルの「面に垂直な成分と面に平行な成分」を幾何学的に求める方法について説明する。この方法は，いろいろな教科書で使われているが，「応力を任意の面に対して座標変換して観測する」という概念が無くても，何となくわかったような気になるため，少々危険な論法であるので注意が必要である。



微小な四角形の領域を考えた時に，設定した座標系に対して，各面に働く応力ベクトルの成分（すなわち，各垂直応力とせん断応力）が上図（左）のようになっているとする。その時，鉛直線からθ傾いた面に働く応力ベクトルの面に対しての垂直成分と平行成分の大きさを求めたい。

そのため，上図（右）のように，角度θ傾いた任意の面で切断した，微小三角形領域の土塊の力の釣り合いを考える。実際は，各面に応力ベクトルが働いているが，図ではそれぞれの面での応力ベクトルの成分（垂直成分と平行成分）だけを示している。

それぞれの成分の大きさは単位面積当たりの力であるので，力の釣り合いを考えるためには，各面の面積（奥行きの長さは 1 としておく）をあらかじめ決めておく。

ここでは，σ_x が働く面の面積を Δy とし，σ_y が働く面の面積を Δx とすると，σ_n が働く面の面積は

$\dfrac{\Delta y}{\cos\theta}\left(=\dfrac{\Delta x}{\sin\theta}\right)$となる。

したがって，図より x 方向の力の釣り合いは，

$$\sigma_x\cdot\Delta y+\tau_{xy}\cdot\Delta x-\sigma_n\cos\theta\cdot\frac{\Delta y}{\cos\theta}-\tau_n\sin\theta\cdot\frac{\Delta y}{\cos\theta}=0 \qquad (16)$$

同様に，y 方向の力の釣り合いは，

$$\sigma_y\cdot\Delta x+\tau_{xy}\cdot\Delta y-\sigma_n\sin\theta\cdot\frac{\Delta y}{\cos\theta}+\tau_n\cos\theta\cdot\frac{\Delta y}{\cos\theta}=0 \qquad (17)$$

$\Delta x/\Delta y=\tan\theta$ を用いて，式(16)と(17)を整理すると，それぞれ以下のようになる。

$$\sigma_n+\tau_n\tan\theta=\sigma_x+\tau_{xy}\tan\theta$$

$$\sigma_n\tan\theta-\tau_n=\sigma_y\tan\theta+\tau_{xy}$$

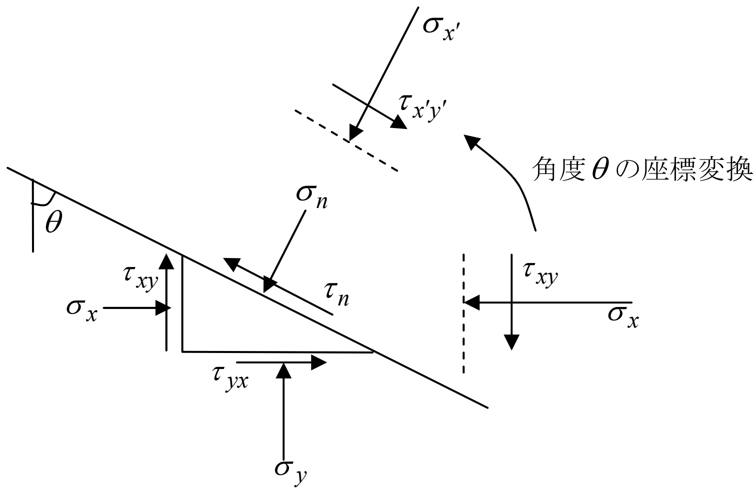
結局，σ_n と τ_n は，

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta$$

となる。



これは，上のように角度θの座標変換で求めた$\sigma_{x'}$と$\tau_{x'y'}$と結果として同じになる。ただし，τ_nは座標変換の場合の$\tau_{x'y'}$とは向きが逆に定義されていたので，符号は逆になっている。

このように，せん断応力の働く向きは，自分がどちらに決めたが重要なので，せん断応力を求める際には，その大きさだけではなく，向きにも常に注意しなければならない。