土質力学Ⅰ及び演習（Ｂ班：小高担当）　配付資料No.9 （2005.11.15）

【定常浸透場での浸潤面と井戸】

(1)浸潤面におけるDupuit（デュピ）の仮定

図1に示すように，不透水面$z=0$と浸潤面$z=h(x)$の間を流れる地盤内の地下水の流れ場を考える。A点からB点への地下水の流れは，

$$\mathbf{v}=-k\frac{\Delta h}{\Delta \mathbf{s}} \qquad (1)$$

となる。ただし，$\mathbf{v}$と$\mathbf{s}$はA→Bに沿ったベクトル量である。ここで，$h(x)$の勾配が非常に緩やかであったと仮定すると，$\Delta \mathbf{s} \approx \Delta x$とみなせる。また，浸潤面においては，全水頭と位置水頭は同じであるので，$\Delta h \approx \Delta z$とみなせる。結局，式(1)は，

$$v_x \approx -k\frac{\Delta z}{\Delta x}=-k\frac{dz}{dx},\quad v_z \approx 0 \qquad (2)$$

となる。これをデュピの仮定と言う。普通はx成分のみを書く。

$$v \approx -k\frac{dz}{dx} \qquad (3)$$

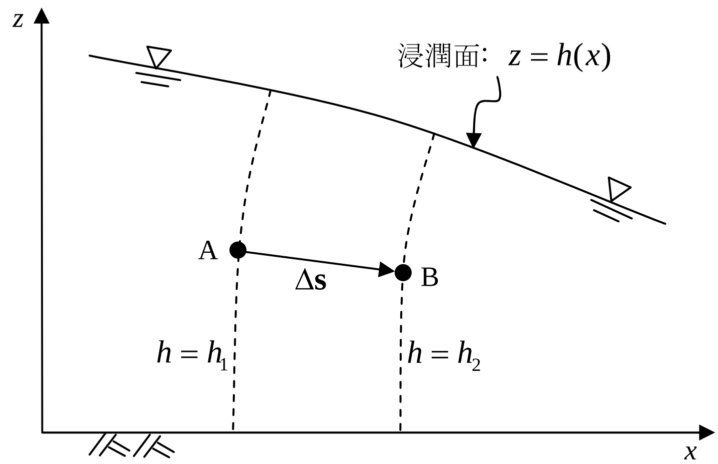

図１　浸潤面（自由水面）と等ポテンシャル面

(2)締切堤の浸潤面と流量解析

図2に示す幅Bの締切堤の浸潤面を考える。

単位時間，単位奥行きあたりの流量Qは，

$$Q=v\cdot z=-kz\frac{dz}{dx} \qquad (4)$$

したがって，$Qdx=-kzdz$

流量一定の連続条件が成り立つ時に，この微分方程式は積分することができ，

$$Qx=-\frac{1}{2}kz^2+C \quad C：積分定数 \qquad (5)$$

Qが一定であるので，浸潤面$z=h(x)$は放物線となることがわかる。境界条件を入れると，

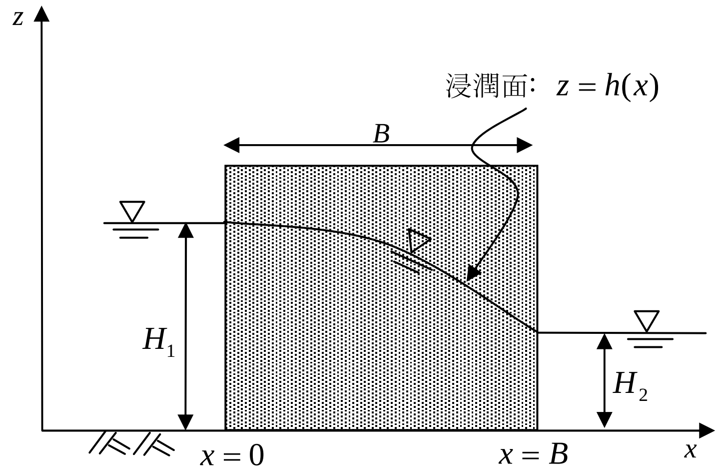

図２　締切堤の浸潤面

$x=0$で$z=H_1$より，$C=\frac{1}{2}kH_1{}^2$

$x=B$で$z=H_2$より，$QB=-\frac{1}{2}kH_2{}^2+C$

したがって，最終的に締切堤の単位時間，単位奥行きあたりの流量は以下のようになる。

$$Q=\frac{k}{2B}(H_1{}^2-H_2{}^2) \qquad (6)$$

ここでは$H_1>H_2$であるためにQの符号は正であるので，正の方向に流れていることがわかる。

(2) アースダム（台形断面堤防）の浸潤面と流量解析

図 3 に示すアースダムの浸潤面を考える。ここでは，座標の取り方の便宜上，水は x の負の方向に流れることとする。ここでは，主に浸潤面が堤防法面のどの位置に現れるのか（浸出点の位置）と流量について考察する。

単位時間，単位奥行きあたりの流量 Q は，締切堤と同様に式(4)の微分方程式で表される。したがって，式(4)を再掲して，

$$Q = -kz\frac{dz}{dx} \qquad (7)$$

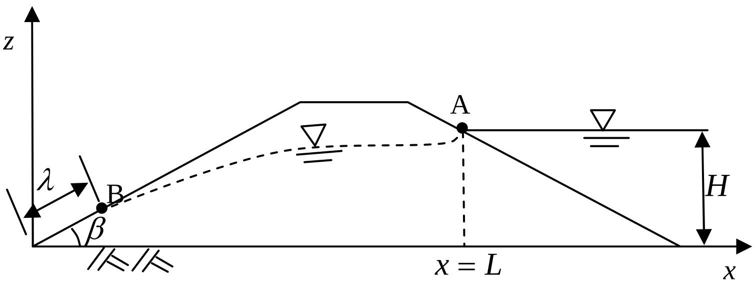

図 3 アースダムの浸潤線

浸出側の B 点から左側の法面も浸潤面の 1 つであるので，その位置においては，

$$\frac{dz}{dx} = \tan\beta \qquad (8)$$

が成り立っている。また，B 点においては，z と λ には以下の関係が成り立つ。

$$z = \lambda\sin\beta \qquad (9)$$

式(8), (9)を式(7)に代入して，次式を得る。

$$Q = -k\lambda\sin\beta\tan\beta \qquad (10)$$

一方，式(7) をそのまま積分した，放物線である浸潤面の式(5)を再掲すると，

$$Qx = -\frac{1}{2}kz^2 + C \qquad C\text{：積分定数} \qquad (11)$$

となるが，これに A 点と B 点における以下の境界条件を適用する。

A 点： $x = L$ で $z = H$ より，

$$QL = -\frac{1}{2}kH^2 + C \qquad (12)$$

B 点： $x = \lambda\cos\beta$ で $z = \lambda\sin\beta$ より，

$$Q\lambda\cos\beta = -\frac{1}{2}k\lambda^2\sin^2\beta + C \qquad (13)$$

式(13)に式(10)を代入する。

$$-k\lambda^2\sin\beta\cos\beta\tan\beta = -\frac{1}{2}k\lambda^2\cos^2\beta + C$$

$$-k\lambda^2\sin^2\beta = -\frac{1}{2}k\lambda^2\cos^2\beta + C$$

$$\therefore\ C = -\frac{1}{2}k\lambda^2\sin^2\beta \qquad (14)$$

式(12)に式(14)と式(10)を代入すると，

$$(-k\lambda\sin\beta\tan\beta)L = -\frac{1}{2}kH^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2\sin^2\beta$$

$$(\lambda\sin\beta\tan\beta)L = \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\beta$$

となり，λ で整理すると，最終的に，λ に関する以下の 2 次方程式となる。

$$\lambda^2 - \frac{2L}{\cos\beta}\lambda + \frac{H^2}{\sin^2\beta} = 0 \qquad (15)$$

これを解けば，

$$\lambda = \frac{L}{\cos\beta} \pm \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2\beta} - \frac{H^2}{\sin^2\beta}}$$

したがって，実際にあり得る解を選択すると，浸出点の位置λは

$$\lambda = \frac{L}{\cos\beta} - \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2\beta} - \frac{H^2}{\sin^2\beta}} \qquad (16)$$

となり，λは透水係数kには依存せず，浸出側の法面の勾配βや水面の境界条件HとLのみによって決まることがわかる。

最終的に，このアースダムの単位奥行きあたりの流量は，式(16)を式(10)に代入して，

$$Q = -k\left(\frac{L}{\cos\beta} - \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2\beta} - \frac{H^2}{\sin^2\beta}}\right)\sin\beta\tan\beta \qquad (17)$$

と得られる。

注意：Qの符号は負であるが，これはx座標の負の方向の流れの流量を表している。したがって，単に流量はいくらかと聞かれる場合には，負号をとって，

$$Q = k\left(\frac{L}{\cos\beta} - \sqrt{\frac{L^2}{\cos^2\beta} - \frac{H^2}{\sin^2\beta}}\right)\sin\beta\tan\beta \qquad (18)$$

と答えた方が良い場合もある。このように，はじめの設定から明らかにx座標の負の方向の流れを考えている場合には，式(7)の微分方程式の段階から負号を取って絶対値で考えても良い。教科書では井戸の説明においてはそのように書かれているが，以下の説明ではあえて負号を付けたまま書くので，注意すること。

⑶ 井戸の定常問題（重力井戸）

図 4 に示すように，不透水層の上に地下水が流れやすい砂層が堆積していたとする。その地盤に井戸を掘り（図 4 中央），流量Qで水を汲み上げ続ける。図に示す半径Rよりも外側の領域から水がどんどん供給される場合には，十分に時間が経過した後には，時間に伴う変化がなくなる定常状態に落ち着く。

重力井戸の場合には，地下水面（浸潤面）の形は重力の作用によって自由に変化する。この浸潤面の形を決めるのに，デュピの仮定を用いる。すなわち，

$$Q = -2\pi r \cdot k \cdot h\frac{dh}{dr} \qquad (19)$$

ただし，井戸を中心とした軸対称条件であるので，全領域の総計を考えるために，$2\pi r$がかけられている。

式(19)を変形すると次式となる。

$$Q\frac{dr}{r} = -2\pi khdh \qquad (20)$$

Qはrによらず一定なので，上式は積分できて

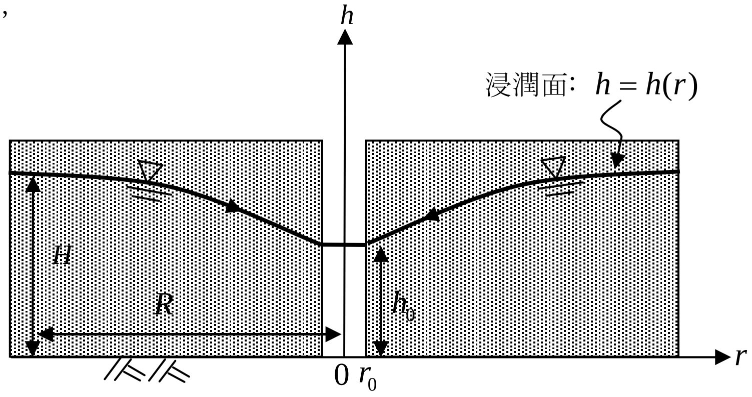

図 4 重力井戸の定常問題

$$Q \ln r = -\pi k h^2 + C \qquad (21)$$

となる。これに境界条件

$$\begin{cases} r = r_0 \text{ で } h = h_0 & r_0 \text{：揚水井戸の半径} \\ r = R \text{ で } h = H \end{cases}$$

を適用すると，$Q \ln(R/r_0) = -\pi k(H^2 - h_0{}^2)$ となり，結局，次式となる。

$$Q = -\frac{\pi k(H^2 - h_0{}^2)}{\ln(R/r_0)} \qquad (22)$$

負号は，x 座標の負の方向の流れ，すなわち井戸の中心に向かう流れを表しており，井戸の「揚水量」はと聞かれれば，絶対値である以下の流量となる。

$$Q = \frac{\pi k(H^2 - h_0{}^2)}{\ln(R/r_0)} \qquad (23)$$

⑷ 井戸の定常問題（堀り抜き井戸）

図 5 に示すように，井戸を掘った地盤の上部に難透水の粘土層があり，その下部には地下水が流れる砂層（滞水層）があるとする。その滞水層は水圧が加わった被圧水層であるとする。

滞水層の全水頭分布（ここでは位置水頭が同じなので圧力水頭の勾配しかない）が外側に行くほど大きくなり，その勾配により井戸の中心に向かう流れが発生しているとすれば，ダルシー則を用いて流量Qは，

$$Q = -2\pi r \cdot b \cdot k \frac{dh}{dr} \qquad (24)$$

となる。重力井戸と異なり，ディピの仮定を用いているわけではないので，流路の高さはb一定である。また，軸対称条件で地盤全領域を考えるために重力井戸と同様に$2\pi r$をかけている。この式を変形して，

$$Q \frac{dr}{r} = -2\pi bk dh \qquad (25)$$

Qはrによらず一定なので，上式は積分できて，

$$Q \ln r = -2\pi kbh + C \qquad (26)$$

となる。これに以下の境界条件

$$\begin{cases} r = r_0 \text{ で } h = h_0 \\ r = R \text{ で } h = H \end{cases}$$

を適用すると，結局次式となる。

$$Q = -\frac{2\pi kb(H - h_0)}{\ln(R/r_0)} \qquad (27)$$

負号は井戸の中心に向かう流れを表し，「揚水量」は負号をとって絶対値で答えればよい。

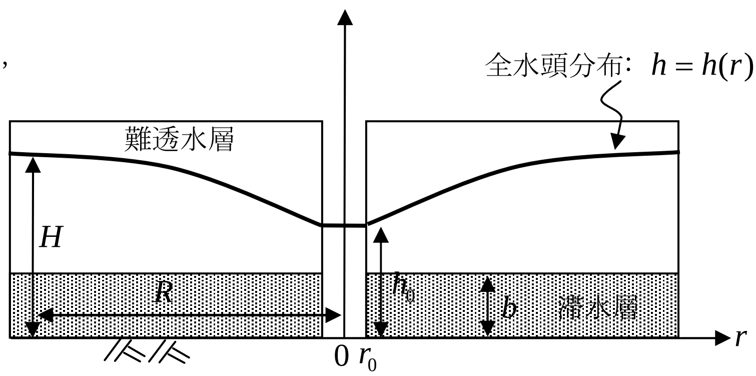

図 5 掘り抜き井戸の定常問題

⑸ 現場揚水試験（原位置透水試験）

実際の井戸において，揚水量Qと観測用の井戸（観測井）での水位Hがわかれば，式(22) (または(23)), (27)により透水係数kを求めることができる。実際は誤差も多いため，1 本の観測井ではなく，複数の観測井を用いて計測されることが多い。このように現場で計測される透水係数は，現場でサンプリングしてきた土を用いて室内の透水試験（配布資料 No.5 参照）で求めた透水係数よりも大きく計測されることが一般的である。