

## 【2 次元浸透解析】

## (1) ラプラスの式

一次元浸透場と同様に、土の圧縮性は無視することとし、領域内での水の流出入はないものとする。  
この場合の多次元浸透場での連続式は  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  となる。成分表示すると

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix}$  は、ダルシー則に従い、 $V_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$ ,  $V_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}$ ,  $V_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$

ここに、 $h$  は全水頭である。透水係数が流れる方向や地盤の深さに依存せずに全領域で等しく一定\* ( $k = k_x = k_y = k_z = \text{const.}$ ) と仮定すれば、ダルシー則を式(1)に代入することにより、次式のラプラスの式を得る。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

注: 実際の地盤内では、透水係数は流れの方向に依存する場合が多く、通常では水平方向の方が鉛直方向よりも透水性は高い場合が多い (後述)。また、同じ地盤材料で構成された均一な地盤であっても、深い方が密 (間隙比が小) になっている場合が多く、その場合には透水性が低くなっている場合がある。

## (2) ポテンシャルと流れ関数

以下、簡単のため 2 次元で議論することとし、次式のラプラス方程式で表される最も理想化した 2 次元定常浸透問題を考える。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

関数  $f(w) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$  を考える。ただし、 $w = x + iy$  (複素数) である。

関数  $f(w)$  が正則、すなわち微分可能であるための必要十分条件は、コーシー・リーマンの関係式より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4)$$

である。便宜上、複素数を使っているが、要するに、 $\Phi(x, y)$  と  $\Psi(x, y)$  の 2 変数関数がそれぞれ、どのような経路で  $(x, y)$  に近づけた時にも、それぞれ同じ値に収束することを意味する。

ここで、 $\Phi(x, y)$  と  $\Psi(x, y)$  にそれぞれ、次式を適用すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6)$$

となり、 $\Phi(x, y)$  も  $\Psi(x, y)$  もラプラスの式を満たすことがわかる。

式(3)より全水頭  $h$  はラプラスの式を満たすポテンシャルであるので、式(5)と見比べて  $\Phi$  は  $h$  に等しいと仮定する。ではその場合、 $\Psi$  はどのような性質を持つ関数となるのか考察する。

$\Psi$  の全微分を考えると,

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy = -\frac{\partial h}{\partial y} dx + \frac{\partial h}{\partial x} dy = \frac{1}{k}(V_y dx - V_x dy) \quad (7)$$

となる。 $\Psi = \text{const.}$  上では、 $d\Psi = 0$  となるので,

$$(V_x dx - V_y dy)_{\Psi=\text{const.}} = 0 \quad \text{すなわち,} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}} = \frac{V_y}{V_x} \quad (8)$$

上式は、 $\Psi = \text{const.}$  の線の接線  $dy/dx$  が  $V_y/V_x$  に等しいことを意味しており、 $\Psi = \text{const.}$  線が流線そのものであることを示す。ここで、 $\Psi$  を流れ関数と呼ぶことにする。

一方、 $\Phi$  の全微分を考えると,

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = \frac{1}{k}(-V_x dx - V_y dy) \quad (9)$$

となるので,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} = -\frac{V_x}{V_y} \quad (10)$$

となる。

したがって、等ポテンシャル線  $\Phi = \text{const.}$  の接線の勾配

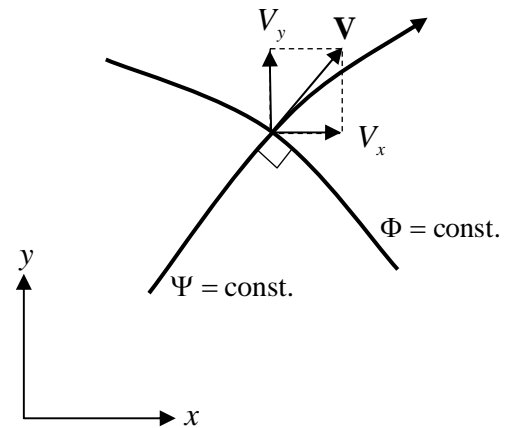
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}}$$

と流線  $\Psi = \text{const.}$  の接線の勾配  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}}$

を掛け合わせると,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}} = -1$$

となり、お互いは直交することがわかる。



### (3) フローネット (流線網) 解析

今までの議論により、等ポテンシャル線 ( $\Phi = \text{const.}$ ) と流線 ( $\Psi = \text{const.}$ ) が直交することがわかった。この性質を用いて、等ポテンシャル線と流線を網目状に描いて浸透解析をすることがある。この網目図のことをフローネット (流線網) と呼び、それを用いた図式浸透解析をフローネット解析と言う。

フローネットは以下の 5 点の性質を持つ。

#### フローネットの性質

- ① 等ポテンシャル線と流線は直交する。
  - ② 各流管 (流線と流線の間) を流れる流量は等しい。
  - ③ 各等ポテンシャル線間の水頭の損失量は等しい。
  - ④ 等ポテンシャル線間の間隔と流線間の間隔の比は一定とする。
  - ⑤ 不透水層 (面) に接する線は 1 つの流線となり、大気に接する線は 1 つの等ポテンシャル線となる。
- 特に、④において、等ポテンシャル線間と流線間の間隔が等しいものを**正方形フローネット**と呼ぶ。通常はこの正方形フローネットを用いる。正方形というのは、間隔が等しいという位の意味合いであり、ネットが本当に正方形になっている必要はない。

#### (4) 正方形フローネットの特長

地盤内が等方的な浸透場と仮定できるときに、正方形フローネット解析は威力を発揮する。図解法として優れた点を以下に説明する。

右図のようにいくつかの流管（流線で挟まれた領域）の中で、まず流管 A に着目する。

流線と等ポテンシャル線で囲まれた領域 1 での流速  $v_1$  は、次式となる。

$$v_1 = k \frac{\Delta h_1}{d_1} \quad (1)$$

ここに、 $\Delta h_1$  は領域 1 を囲む等ポテンシャル線間での水頭損失であり、 $d_1$  は領域 1 での内接円の直径（すなわち正方形の 1 辺）である。これより、領域 1 を単位時間、単位奥行きあたりに流れる流量  $Q_1$  は、

$$Q_1 = v_1 \cdot d_1 = k \frac{\Delta h_1}{d_1} \cdot d_1 = k \Delta h_1 \quad (2)$$

となる。同様に、領域 2 を流れる単位時間、単位奥行きあたりに流れる流量  $Q_2$  は、

$$Q_2 = v_2 \cdot d_2 = k \frac{\Delta h_2}{d_2} \cdot d_2 = k \Delta h_2 \quad (3)$$

となり、式(2),(3)より、流管内を流れる流量は、正方形フローネットを仮定する限りは、流管の幅を気にしなくても良いことがわかる。

さらに、領域 1 と領域 2 は同じ流管内にあることから、連続条件すなわち、 $Q_1 = Q_2$  を満たす必要がある。したがって、式(2)と式(3)を等値することにより、

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 \quad (4)$$

となり、等ポテンシャル線間での水頭損失は、正方形フローネットを仮定する限りは、どこでも等しいことがわかる。

さて、別の流管 B 内にある領域 3 に着目する。流量  $Q_3$  は、

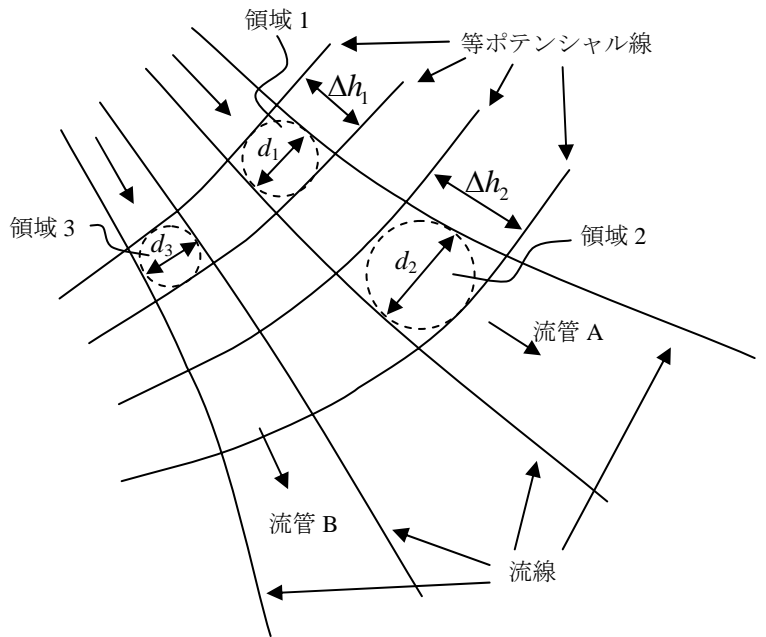
$$Q_3 = v_3 \cdot d_3 = k \frac{\Delta h_1}{d_3} \cdot d_3 = k \Delta h_1 = Q_1 \quad (5)$$

となり、結局、正方形フローネットを仮定する限りは、どの流管の流量も等しいことがわかる。

以上のように、正方形フローネットは複雑なことを考える必要が無く描きやすい上に、極めて合理的に浸透解析ができる特長を持つ。

最終的に、境界内における総流量  $Q$  は、総流管数  $N_f$  を用いて次式となる。

$$Q = \sum_{n=1}^{N_f} Q_i = N_f \cdot \Delta Q \quad (6)$$



各流管における流量  $\Delta Q$  ( $= Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{N_f}$ ) は、等ポテンシャル線で区切られた区間数  $N_d$  を用いて、

$$\Delta Q = k\Delta h = k \frac{H}{N_d} \quad (7)$$

となる。式(7)を式(8)に代入して、最終的に総流量は次式で表すことができる。

$$Q = kh \frac{N_f}{N_d} \quad (8)$$

### (5) コンクリート重力式ダムフローネット

下の各図に示すフローネットを用いて、透水量とダム底面に作用する揚圧力（水圧）を求めてみよう。

