土質力学Ⅰ及び演習（Ｂ，Ｃ班合同授業：小高担当）　配付資料 No.３（2004.11.1）

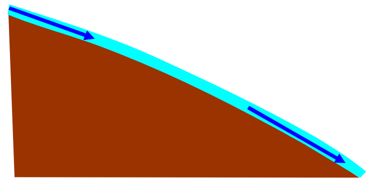
【土中の水の流れ】

(1)水頭（全水頭，圧力水頭，位置水頭）とエネルギー

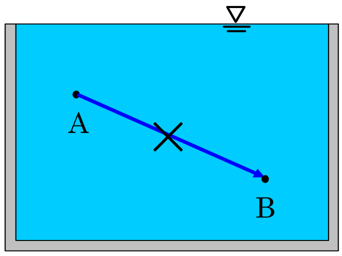
水は「高い」ところから「低い」ところに流れる。と言っても，「高い」「低い」というのは，位置だけの話ではなく，それぞれの位置での水の圧力も含めた，全水頭の話である。

図 1(a)のように，位置に比べて水深が無視できるような，表面流れを考える場合には，（水深から算定される）水圧が無視できるので，水の流れは「高い」位置から「低い」位置に流れる。

ところが，図 1(b)のように，位置に比べて水深が無視できないような，水槽の中の水を考える。水槽の中の水が静置されているとき, A 点の方が, B 点よりも位置が高いからと言って, A 点から B 点へ水が流れるとは普通は考えない。これは A 点と B 点とは，位置の高さが違っても，全水頭は等しいからである（図 2 参照)。すなわち，水の流れを支配する「高い」「低い」は全水頭の高低である。



(a) 表面流れ　位置のみで流れの方向が決まる。



(b) 水槽の中の水　位置だけでは流れの方向が決まらない

図 1

水頭　：水の柱の一番上（頭）の高さを表す。単位は(m)
水理学でエネルギーを表すために使う概念のひとつ。

圧力水頭：対象とする位置での水圧の大きさを，水柱の高さに換算して表したもの。例えば，圧力水頭 1m なら，実際の圧力 p_w は，

$p_w=\gamma_w \times h$=1(tf/m^3)×1(m)=1(tf/m^2) となる。

(SI 単位ならば，$p_w=\gamma_w \times h$=9.8(kN/m^3)×1(m)=9.8(kN/m^2))

逆に，9.8(kN/m^2)の圧力を持つならば，その圧力水頭は 1(m)である。

位置水頭：ある任意の基準面から，対象とする位置までの水柱の長さ。
任意の基準面からの位置であるので，相対的なものであることに注意する。要するに位置エネルギーを表す。

全水頭　：通常の土質力学では，**圧力水頭と位置水頭の和**のことを言う。しかし，土質力学でも水理学でも，全水頭の本当の定義は，速度水頭と圧力水頭と位置水頭の和のことを言うが，土中の流速は非常に小さく，速度水頭は他の水頭に比べて無視できるほど小さいために，土質力学でははじめから考えないことにしている。そのため，冒頭の

全水頭＝**圧力水頭＋位置水頭**

という定義となる。

水理学では，全水頭から速度水頭を除いた，位置水頭と圧力水頭の和のことをピエゾ水頭と呼ぶが，土質力学での全水頭はこのピエゾ水頭そのものである。すなわち，土質力学では，全水頭＝ピエゾ水頭である。もともと水頭とはエネルギーを表すための概念であるから，ピエゾ水頭とは何を表すためのものかと言えば，全エネルギーから速度エネルギーを除いたものであるから，当然ポテンシャルエネルギーを表すものである。

したがって，土質力学での全水頭はポテンシャルエネルギーを表す。位置水頭が位置の基準面によってかわる相対的なものであるので，全水頭もやはり相対的なものである。したがって，全水頭の大きさそのものより，全水頭の「勾配」の方が透水解析には重要となる。これは，ポテンシャルを扱うどの力学でも同じことである。

圧力水頭の基準面は水面であり静置した水では圧力水頭は水深を表す。位置水頭は，基準面からの高さそのものを表す。したがって，図 1 のような場合には，全水頭はどの深さ，どの位置であっても等しくなる。したがって，水槽内では水の流れは起こらない。

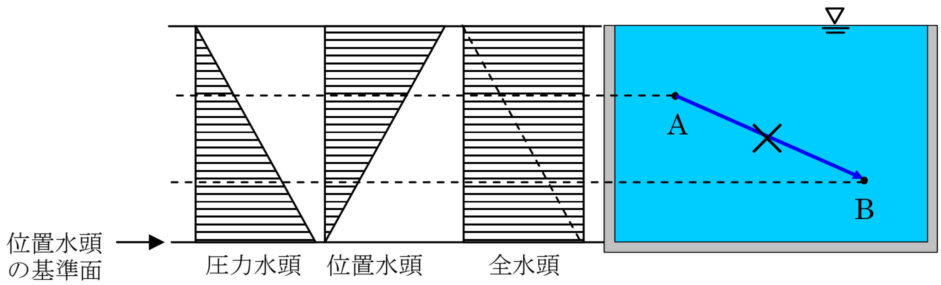


図 2 静置した水槽内の水の水頭

(2) 一次元場での土中の水の流れ

図 3 のように，水位の異なる 2 つのパイプを並べて，底面をチューブで連結させる。もし，水の流れを遮るものがなければ，一瞬にして，2 つのパイプの水位差はなくなる。

しかし，厚さが無視できる板が図の位置に固定されており，完全に上下が遮断されている場合には，各水頭の分布図は図 3 のようになる。

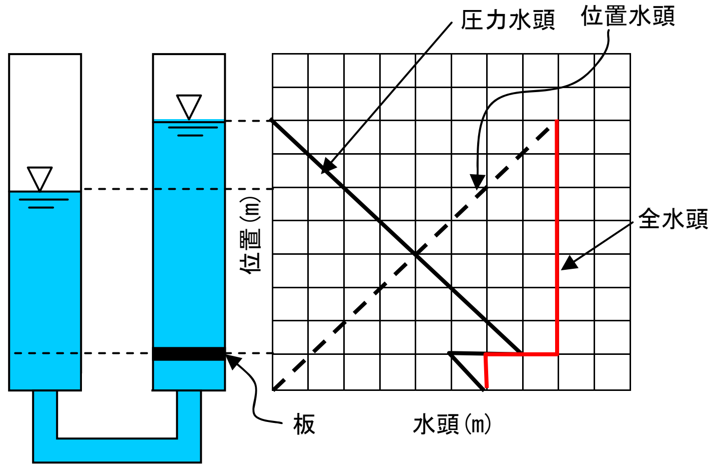


図 3

要するに，2 つのパイプの水位差を保つためには，水を遮断している板は 2m の圧力水頭の差（2m 分の水柱の重さ）を支えなければならない。

しかし，完全に板で遮らなくても，ある程度通過するのに時間がかかるような材料を，板の代わりに用いても，2 つのパイプの水位差をある程度保つことは可能である。ここでは，砂を用いて流れを「ある程度」遮ることを試みる。ただし，厚さが無視できるような薄っぺらな砂では全く効果が期待できないので，ここでは厚さ 3m の砂柱を用いる。ただし，どうしても砂柱中を水が流れて水位が変化してしまうので，現在の水位を維持するように水はそれぞれの位置でオーバーフローさせておくことにする。

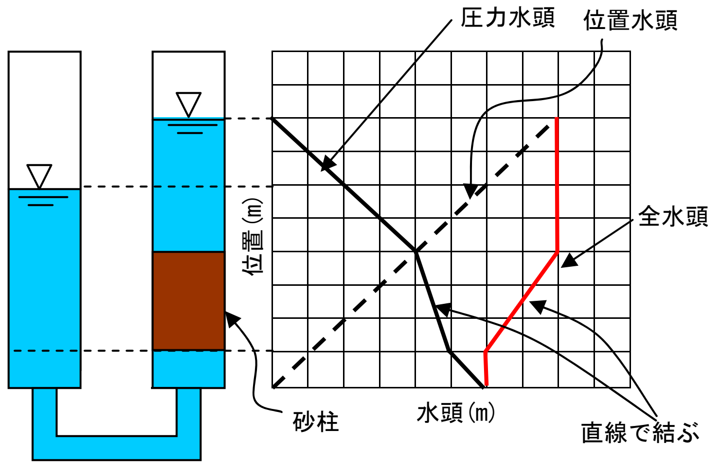


図 4

水だけの部分では，全水頭は一定であるので，3m の砂柱を挟んで 2m の全水頭のギャップが吸収されることになる。砂柱中の上下面には全水頭の差があるので，水は砂柱中のみを下向きに流れる。

この土中の流れの流速は次項で示すダルシー則によって決まる。水の流れ自体がポテンシャルの差，すなわちポテンシャル場の保存力によって発生するので，流線の方向もその力の方向と同一の等ポテンシャル線（等しいポテンシャルをつないだ線）の「勾配（grad）」の方向となる。この保存力のことを，土中の水理では，透水力（あるいは浸透力）と呼ぶ。

(3) 動水勾配と透水力

ポテンシャルである全水頭が等しいポイントをつなげた等全水頭線（等ポテンシャル線）と呼び，等ポテンシャルを表すスカラー関数の勾配を**動水勾配**と呼ぶ。等ピエゾ水頭線の勾配を動水勾配と呼ぶのはもちろん水理学でも同じである。等ポテンシャル線の勾配は保存力の方向を表すが，浸透場では全水頭の勾配は浸透力の方向を表す。

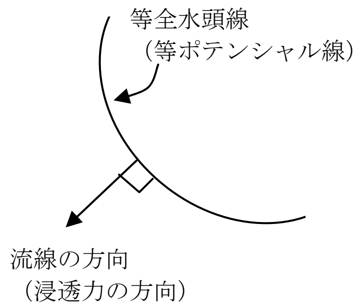


図 5

一次元の流れ場では，全水頭が $h = h(z)$ と表されるとき，動水勾配は

$$動水勾配：i = -\frac{\partial h}{\partial z} \qquad （i\ は無次元量）$$

となる。マイナスの符号は，ポテンシャルの高いところから低い方へ流れることを表している。

透水力 j は，動水勾配 i に水の単位体積重量 γ_w をかけたものであり，土の内部の直接作用する重力と同様の物体力である。

$$透水力：j = i \cdot \gamma_w \qquad （単位体積あたりの力）$$

このように，全水頭が高いところから低いところにかけて物体力である透水力が働き，図 4 の砂柱にも透水力が作用している。透水力については次回また説明する。

(4) ダルシー則

実際の土中を流れる水は, 土粒子の間隙を縫って複雑な経路を伝って流れることになる。その際に，水の流れは大きな抵抗を受けることになる。粘土のように小さな土粒子で構成される地盤材料は透水性が小さく, 砂のような大きな土粒子で構成される地盤材料は透水性が大きい。このように，ミクロで見れば実際の水は紆余曲折しながら土粒子から大きな抵抗を受けつつ流れているのであるが，土質力学では，マクロな平均的な水の流れのみを考える。この際に，水の流れ易さを表す指標として，透水係数 k を用いる。

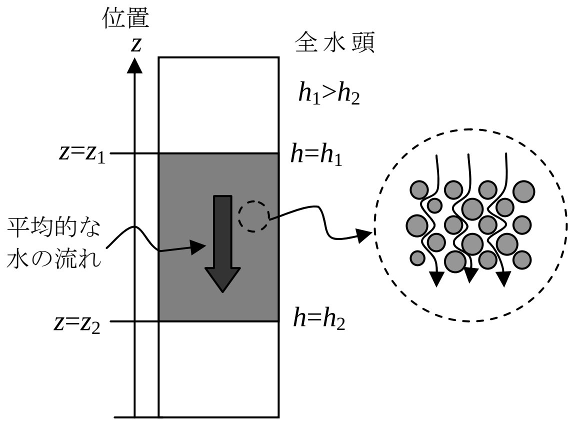


図 6

水の流れの方向は透水力の働く方向, すなわち動水勾配の方向に等しいが，その大きさ（流速）は次式で表される。

$$流速：v = k \cdot i = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \qquad (1)$$

上式は，ダルシーが実験により，流速が動水勾配に比例するということを見いだして作ったものであり，**ダルシー則**と呼ぶ。また，このようにポテンシャル流れとして表すことができる土中の間隙水の平均的な流れをダルシー流れと呼ぶことがある。動水勾配が無次元量なので，透水係数 k の単位は流速 v と同じの速さの次元となる。透水係数のおおよその大きさは以下の通りである。

透水係数 k (cm/s)：　礫（レキ）10^{2}～10^{-1}　　砂 10^{-1}～10^{-3}　シルト 10^{-3}～10^{-6}　粘土 10^{-6}～10^{-9}

土質力学の実務では，透水係数の単位は cm/s が用いられることが多い。さらに，上記のように土の透水係数の範囲は非常に広いために，透水係数は厳密な値よりも大体のオーダー（何乗の桁か）によって議論される。例えば，この粘土の透水係数は 10 の-6 乗のオーダー，とか，この砂の透水係数は 10 の-3 乗のオーダーである，というような用いられ方をする。要するに，10 倍程度の範囲は，それほど大きな誤差とは見なされない。

図 6 の例題において，土中の流れがダルシー則に従うとすれば，流速 v は透水係数 k を用いて，

$$v=-k\frac{dh}{dz}=-k\frac{\Delta h}{\Delta z}=-k\frac{h_1-h_2}{z_1-z_2}$$ （マイナス符号は下向きの流れを表す）

となる。また，図 4 の例題では以下のようになり，砂柱中は一定の流速で，かつ下向きの流れとなる。

$$v=-k\frac{dh}{dz}=-k\frac{\Delta h}{\Delta z}=-k\frac{(8-6)}{(4-1)}=-\frac{2}{3}k$$ （マイナス符号は下向きの流れを表す）

(3) 一次元流れ場での連続式

図 6 において，砂柱の断面積が一定であり，一次元の流れとみなすことができれば，砂柱中で水の湧き出しがなければ，一次元の発散の式より，

$$\frac{dv}{dz}=0 \qquad (\text{多次元では，}\ \mathrm{div}\,v=0) \qquad (2)$$

が成り立つ。この式を z で積分すれば，$v=\mathrm{const.}$ となるが，この場合，砂柱の上端から入って，下端から出て行く水の流量は一定であり，単位時間あたりの流量である流速も砂柱中においては一定であることを表している。式(2)は一次元流れ場での連続式である。

式(2)の連続式に，式(1)のダルシー則を適用すると，

$$\frac{dv}{dz}=\frac{d}{dz}\left(-k\frac{dh}{dz}\right)=-k\frac{d^2h}{dz^2}=0 \quad \text{より} \quad \frac{d^2h}{dz^2}=0 \qquad (\text{一次元流れ場でのラプラスの式}) \qquad (3)$$

となる。この式を 2 回積分してやれば，$h=a\cdot z+b$ （a，b は定数）となり，全水頭は砂柱中では一次関数（直線）となる。また，$h=z+\dfrac{u}{\gamma_w}$ を，式(3)のラプラスの式に代入すれば，圧力水頭 u に関しても

$\dfrac{d^2u}{dz^2}=0$ となり，やはり $u=c\cdot z+d$ （c，d は定数）となり，圧力水頭も砂柱中では必ず直線となる。必ず直線となることがわかれば，砂柱の上下端での全水頭，圧力水頭さえわかれば，砂柱中は上下端の値を直線で結べばよい（図 4 参照）。

(4) 上向き透水

図 4 は砂柱中を下向きに水が流れる場合を考えたが，図 5 のような場合を想定すると砂柱中を上向きに水が流れる。砂柱の下端において 2(m)の全水頭の差があるため，下から上への浸透流が生じる。また，図 6 の場合には，当然のことながら土中に水は流れない。

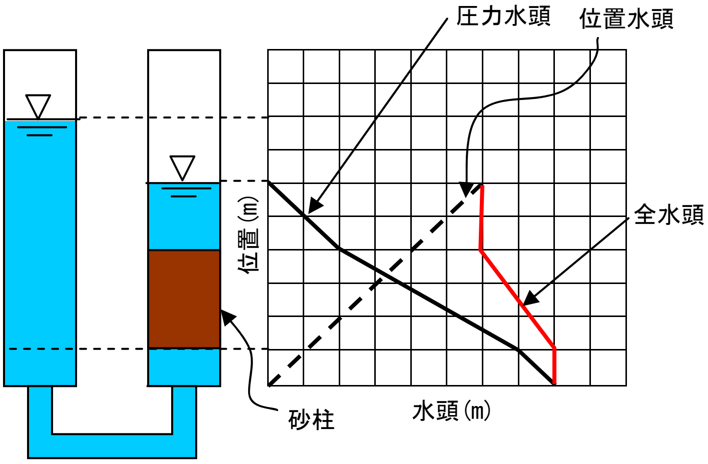


図 5

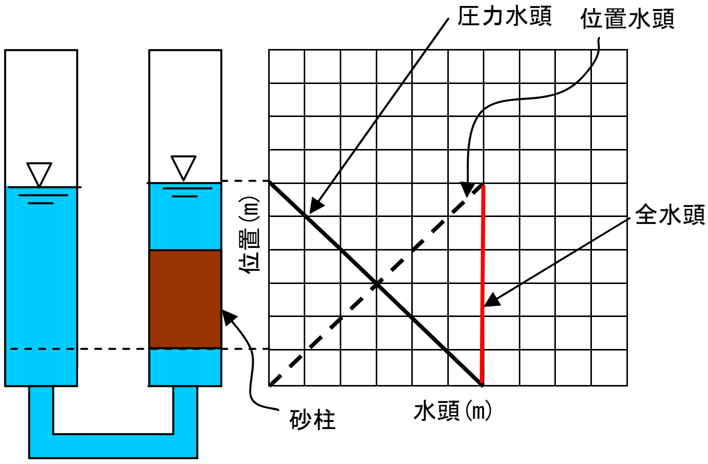


図 6