

【斜面安定：強度安全率・摩擦円法・安定図表】

(1) 強度安全率

斜面安定を考える時になんとなくとまどってしまう原因は、安全率（の概念）の存在にあると言っても良い。なぜ安全率の概念が必要であるかと言えば、実際は崩壊しておらず、現存している斜面について、その安定性（壊れ方や壊れやすさ）を論じるという、一種の自己矛盾を解決するためである。地盤の支持力では、どれだけ荷重を載せれば壊れるか、という直接的な考え方が適用できたが（図1参照）、斜面の安定問題にはその考え方の適用（図2参照）はあまり好ましくない。なぜなら、実際に直面している工学的問題と異なるからである。そのため、斜面の安定問題では、この土のせん断強度をどれだけ小さくしたら、この斜面は壊れるのか、という論法に切り替えて議論する。この「どれだけ小さくしたら」というときのせん断強度の割引率が強度安全率に相当する。※裏を返せば、どれだけ外力が大きくなったら壊れるかと同意である。

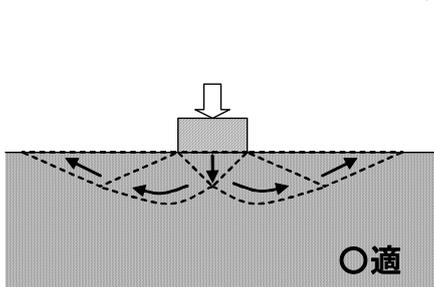


図1：支持力問題における極限荷重の考え方

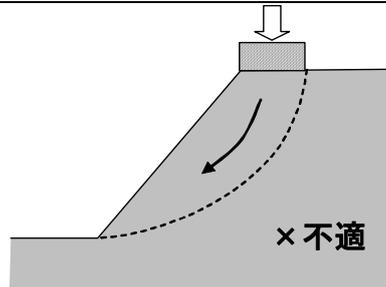


図2：斜面安定問題における極限荷重？
（工学的にあまり意味がない）

すなわち、強度安全率 F_s は、真のせん断強度（土質試験から求められるせん断強度） τ_f と、ここまでせん断強度を小さくしたら斜面が崩壊してしまうという時のせん断強度 τ_m との比として、次式のように表す。

$$F_s = \frac{\tau_f}{\tau_m} \quad (1)$$

τ_m は別の解釈をすると、安定している斜面内で実際に発揮されている（稼働(mobilize)している）せん断強度と言うこともでき、その場合には、強度安全率は真のせん断強度までの余裕率と解釈することができる。

（実は大多数の教科書がこのように説明している）

さて、 τ_f について摩擦則を適用すると、 $\tau_f = c + \sigma \tan \phi$ であるので、式(1)を変形することにより

$$\tau_m = \frac{\tau_f}{F_s} = \frac{c + \sigma \tan \phi}{F_s} = \frac{c}{F_s} + \sigma \frac{\tan \phi}{F_s} (= c_m + \sigma \tan \phi_m) \quad (2)$$

となるので、 $c_m = \frac{c}{F_s}$ 、 $\tan \phi_m = \frac{\tan \phi}{F_s}$ と書いて、 c_m および ϕ_m はここまで小さくしたら斜面が崩壊する限界の強度定数であると考え。上記と同様に、現在の斜面の中では、真の強度定数 c 、 ϕ のうち、実際は c_m 、 ϕ_m だけしか稼働していないというようにも解釈できる。

後で説明する安定計算において、便宜上 c と ϕ の安全率を別々に考えて、粘着力と摩擦角のそれぞれに関する安全率 F_c と F_ϕ のそれぞれを定義し、次式のように書くことがある。

$$c_m = \frac{c}{F_c}, \quad \tan \phi_m = \frac{\tan \phi}{F_\phi} \quad (3)$$

しかし、あくまでこれらの安全率は便宜上定義したものであり、式(1)の強度安全率の定義まで立ち返れば、

$$F_c = F_\phi (= F_s) \quad (4)$$

となった時に、はじめて意味を持つことに注意する。 $F_c \neq F_\phi$ のままでは強度安全率の定義の式(1)と無関連となってしまう、ほとんど意味がない。→後述する。

(2) 土質と摩擦則

せん断強度を表すのに、 $\tau_f = c + \sigma \tan \phi$ と書いたが、不飽和土のような一般的？な土質の場合は、このように単に c 、 ϕ と強度定数を表す場合が多い。しかし、実際の地盤としてはあまり一般的とは言えないが、理想的な土として教科書で良く用いられる「飽和粘土」や「乾燥砂 or 飽和砂」のような場合には、特別な表し方をした摩擦則を用いる場合が多い。

「飽和粘土」の場合 : $\phi_u = 0$ 解析法, $\tau_f = c_u$

「乾燥砂 or 飽和砂」の場合 : 有効応力解析法, $\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi'$

詳細は別紙資料を参照のこと

(3) いろいろな安全率（強度安全率の位置づけ）

斜面全体の安定性に対する安全率の定義として、次式のようなものを定義し、単に安全率と呼んだり、すべりに対する安全率と呼んだりする。

$$F = \frac{\int \tau_f dl}{\int \tau dl} \quad (5)$$

すなわち、安全率 = $\frac{\text{すべり面に沿ったせん断強度の和}}{\text{すべり面に沿ったせん断応力の和}}$ と考える。次元は、分母、分子とも力である。

ただし、斜面を構成する地盤が均質であるとすれば、すべり面が区間 l_1, l_2, l_3, \dots に分けられるとして、それぞれの区間において、せん断強度 $\tau_{f1}, \tau_{f2}, \tau_{f3}, \dots$ であり、かつ稼働せん断応力 $\tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}, \dots$ が発揮されていると考えられる。さらにそれぞれの $\tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}, \dots$ は等しい強度安全率 F_s で $F_s = \tau_{fi} / \tau_{mi}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) と表すことができる。したがって、式(5)は

$$F = \frac{\int \tau_f dl}{\int \tau dl} = \frac{\sum \tau_{fi} l_i}{\sum \tau_i l_i} = \frac{\tau_{f1} l_1 + \tau_{f2} l_2 + \tau_{f3} l_3 + \dots}{\tau_{m1} l_1 + \tau_{m2} l_2 + \tau_{m3} l_3 + \dots} = \frac{\tau_{f1} l_1 + \tau_{f2} l_2 + \tau_{f3} l_3 + \dots}{\frac{\tau_{f1}}{F_s} l_1 + \frac{\tau_{f2}}{F_s} l_2 + \frac{\tau_{f3}}{F_s} l_3 + \dots} = F_s \quad (6)$$

となり、すべり面に沿った全体の安全率は強度安全率と等しくなる。したがって、均質な土質で構成された斜面の場合には、強度安全率は斜面全体の安全率と等価であることがわかる。

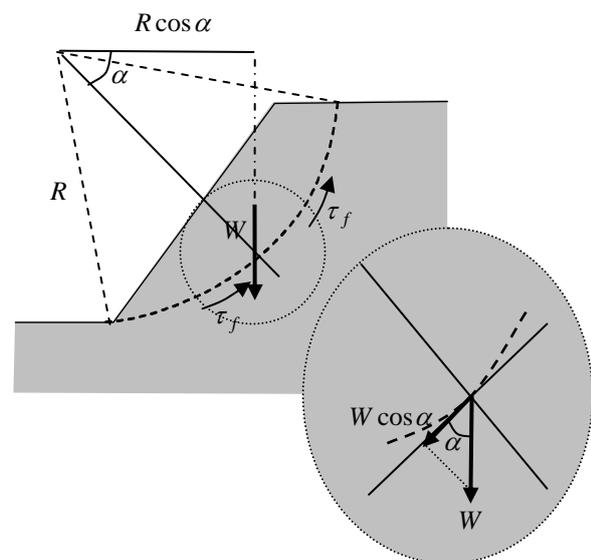
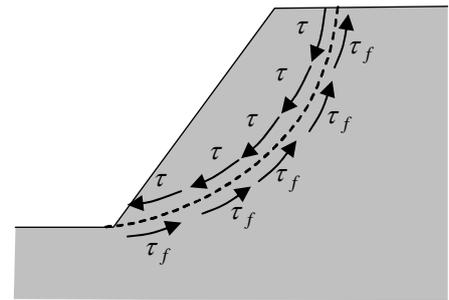
また、式(5)と似たものとして、斜面安定をマクロな土塊のつり合い問題と考えて定義された、モーメント安全率 F_m というものがある。すなわち、すべり面より上の土塊について、滑らそうとする力によるモーメントと抵抗しようとするせん断強度によるモーメントとの比で定義する。すなわち、すべり面を半径 R の円弧と仮定し、土塊全体の自重を W とした時、

$$F_m = \frac{\int \tau_f R dl}{W R \cos \alpha} \quad (7)$$

となる。この場合（円弧と仮定しているからであるが）、分母分子の R を約分することができ、

$$F_m = \frac{\int \tau_f dl}{W \cos \alpha} = \frac{\sum \tau_{fi} l_i}{W \cos \alpha} \quad (8)$$

分子は式(5)の安全率と等しい。また、分母の $W \cos \alpha$ は、自重の合力ベクトル W のすべり面接線方向の成分に等しい。これはすべり面を細かく分割した場合において、各すべり面要素上で自重の作用によって発揮されるせん断力の合力に等しく、式(5)の分母と等価である。したがって、 F_m であっても、土質が均質で円弧すべりを仮定できる場合には、 F や F_s と違いはない。



コラム（無理に覚える必要はない）：

モーメントに関する安全率 F_m は、分母分子に角速度 $\dot{\theta}$ を掛けることにより、次式のように変形できる。

$$F_m = \frac{\int \tau_f R dl}{WR \cos \alpha} = \frac{\int \tau_f R \dot{\theta} dl}{W \cos \alpha R \dot{\theta}} = \frac{\int \tau_f \dot{\theta} dl}{W \cos \alpha \cdot \dot{\theta}} \quad (= \frac{\text{内力による仕事率}}{\text{外力による仕事率}}) \quad (9)$$

円弧すべり解析の最も基本的な手順は、円弧の中心と半径を決めて式(7)により F_m を求めるが、何度も円弧の中心と半径を仮定し直すことにより最小の F_m を探索するということになる。この手順は、実は塑性学の「上界定理」を実践しているに他ならず、力学として合理的な手法である。しかし、実際に斜面安定解析を実施する際には、分割法を用いることが多く、その際には強度安全率を用いて力のつり合い、モーメントのつり合いをスライスごとに計算するので、上界定理は厳密には満足しなくなる。

以上のように、上界定理に照らせばモーメントに関する安全率が最も合理的ではあるが、実務上、使用される頻度は低く、強度安全率の使用される頻度が最も高い。

(4) 摩擦円法による強度安全率の計算

コンピューターが発達して、分割法による円弧すべり解析どころか、有限要素法による数値解析が簡便かつ高速にできるようになった現在、摩擦円法などが実務で使用されるようなことは皆無である。しかし、この摩擦円法の考え方は、巧妙かつ合理的であり先人の知恵に敬服せざるを得ない。また、現在の実務でも頻繁に使用される「安定図表」が、この摩擦円法による斜面安定解析によって作成されたという点において、この摩擦円法を無視するわけにはいかない。

1) 摩擦円法の卓抜した仮定

すべり面で発揮されているせん断抵抗力について、粘着力による抵抗力と拘束圧（摩擦）による抵抗力とを分離する。

2) 摩擦円

まず、拘束圧（摩擦）による抵抗力のみを考える。拘束圧のすべり面直交方向の成分は σ そのものであり、すべり面に平行成分な成分は摩擦角により $\sigma \tan \phi$ となる。したがって、拘束圧（摩擦）による抵抗力ベクトル σ_r は、それらの合力として計算され、作用する方向はすべり面直交方向から ϕ だけ傾いている。また、 σ_r の作用線の延長線はすべり面の円弧の中心から距離 $R \sin \phi$ だけ離れる。

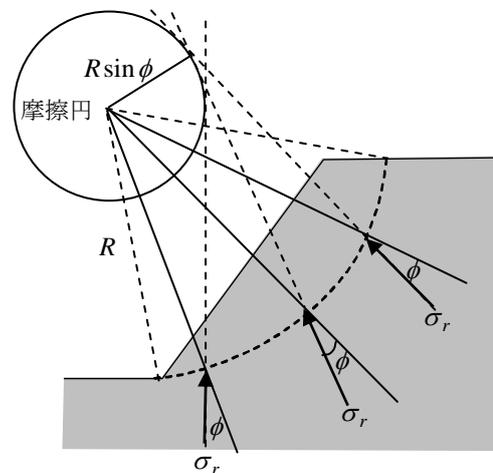
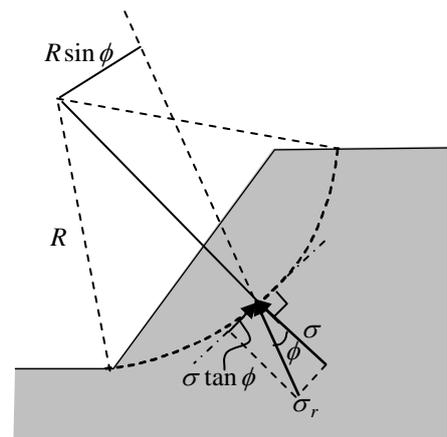
σ_r はすべり面上のいたるところで規定することができるが、それぞれの σ_r の作用線は常にすべり面の円弧の中心から距離 $R \sin \phi$ だけ離れることに注意する。結局、すべり面上のどの位置の σ_r であっても、それらの作用線は、円弧の中心から半径 $R \sin \phi$ で描いた円と必ず接することになる。この半径 $R \sin \phi$ の円を「摩擦円」と呼ぶ。摩擦円法はこの摩擦円を巧み使う斜面安定解析法である。

3) 摩擦円を用いた斜面安定解析法

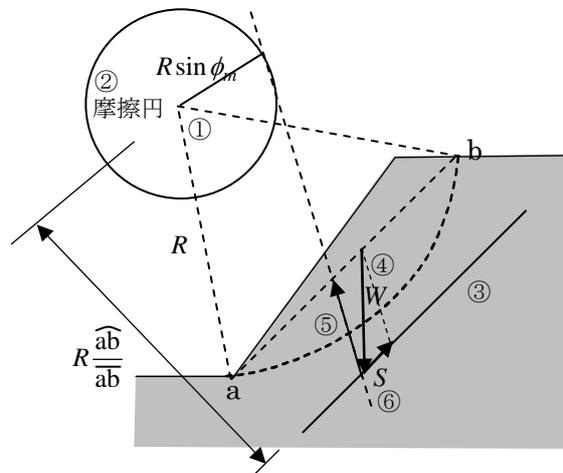
- ①すべり面の円弧（中心と半径）を仮定する。この仮定した円弧を用いて、以下の議論を行う。
- ②斜面の真の強度定数 c 、 ϕ が土質実験から求められている

として、想定する斜面に ϕ_m の摩擦角が発揮されていると仮定する。その時、摩擦角に関する安全率は、

$$F_\phi = \frac{\tan \phi}{\tan \phi_m} \quad (a)$$



- となるが、この摩擦角 ϕ_m を用いて、①で決めた円弧の中心から、半径 $R \sin \phi_m$ の摩擦円を描く。
- ③粘着力による抵抗力の合力 S は、大きさはわからないが、方向は弦 ab と平行の方向であり、さらに円弧の中心からの距離が既知 $R \frac{\widehat{ab}}{ab}$ である (※1) ので、その位置に線を引く。
- ④大きさも方向も作用点も既知である唯一のベクトルである自重ベクトル W を描く。すなわち、円弧の重心を通過して鉛直下向きのベクトルとする。矢印の下端を③で引いた線にあわす。
- ⑤③で引いた線と自重ベクトル W との交点から、摩擦円に接する線を引く。すなわち、この方向が拘束圧による抵抗力の合力ベクトルの方向となる (※2)。
- ⑥力の平行四辺形により、 S の具体的な大きさが求められる。 S はすべり面で発揮されている粘着力 c_m と、 $S = c_m \cdot \overline{ab}$ の関係があるため、 c_m の大きさが求められる。
- ⑦⑥で求めた c_m から、 $F_c = c/c_m$ より F_c を求める。
- ⑧強度安全率は、式(4)に示したように、 $F_c = F_\phi (= F_s)$ となって初めて意味がある。
- ⑦で求めた F_c を②で仮定した F_ϕ と比べて、 $F_c \neq F_\phi$ であれば、②に戻って、 F_c が F_ϕ により近くなるように、 ϕ_m を仮定し直す。この②～⑧の操作を、 $F_c = F_\phi$ に近づくまで繰り返す。
- ⑨ $F_c = F_\phi$ となる安全率を特定し、それが①で仮定したすべり面に対する、安全率 $F_s (= F_c = F_\phi)$ である。
- ⑩①に戻り、すべり面の円弧 (中心, 半径) を仮定し直す。(通常はどちらかを固定して、一方ずつ値を動かす) その円弧を用いて、再び②～⑧の操作を行い、この仮定し直した円弧すべり面に対する安全率を求める。
- ⑪①～⑩の操作を繰り返し、最小の安全率を探索し、その最小値を最終的な安全率とする。



(※1) : 理由は板書にて説明。(※2) : 合力の作用線は近似的に摩擦円に接するだけ。

(5) 安定図表

Taylor が摩擦円法を用いて斜面の安定解析を行い、安定数と斜面傾角との関係を整理して安定図表を作成した。現在使用されている図表は、Terzaghi によって安定係数を用いて再整理されたものである。

$$\text{安定係数} : N_s = \frac{\gamma H}{c_m} \quad \text{安定数} : N'_s = \frac{1}{N_s} = \frac{c_m}{\gamma H}$$

この図表を用いることにより、摩擦円を描かなくても、(4)に示した②～⑦の計算ができる。具体的な使用方法については講義にて説明する。