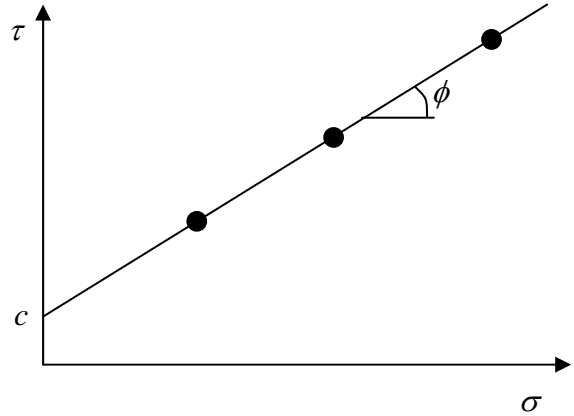


【三軸試験とモール・クーロンの破壊規準】

【モール・クーロンの破壊規準】

クーロン (Coulomb) の破壊規準 :

一面せん断試験は, 計測している応力状態 (垂直応力とせん断応力) が破壊面での応力状態そのものであるため, 例えば, 3 種類の垂直応力で一面せん断試験を実施して, それぞれの (最大せん断応力) が求められれば, それを右図のようにプロットすれば, ほぼ直線に並ぶ。

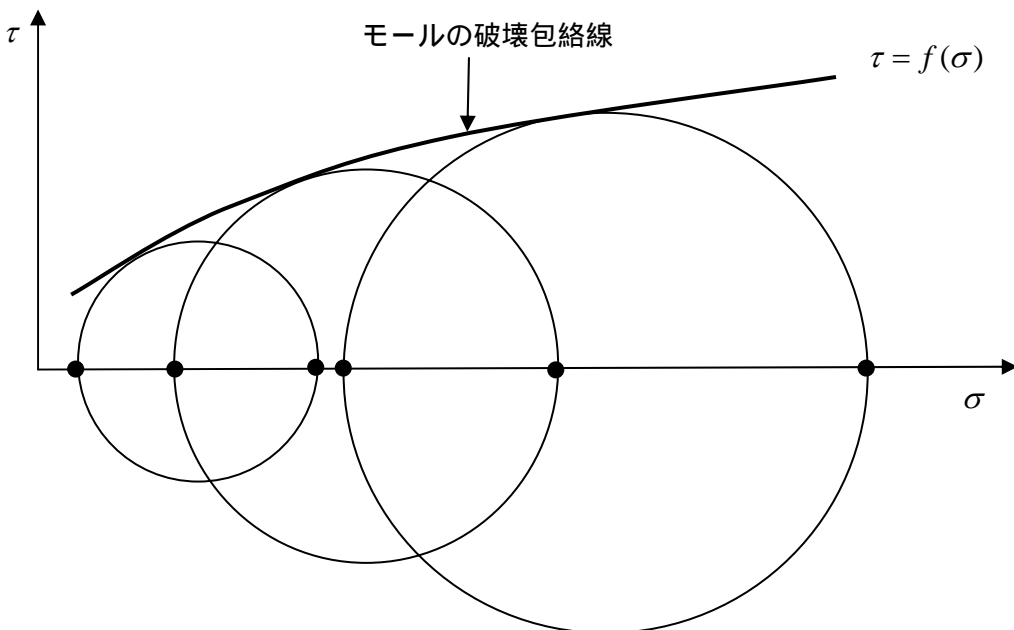


このとき, 切片を  $c$ , 直線の傾きの角度を  $\phi$  として, 次式のように土が破壊する条件を表した。

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad \text{クーロンの破壊規準}$$

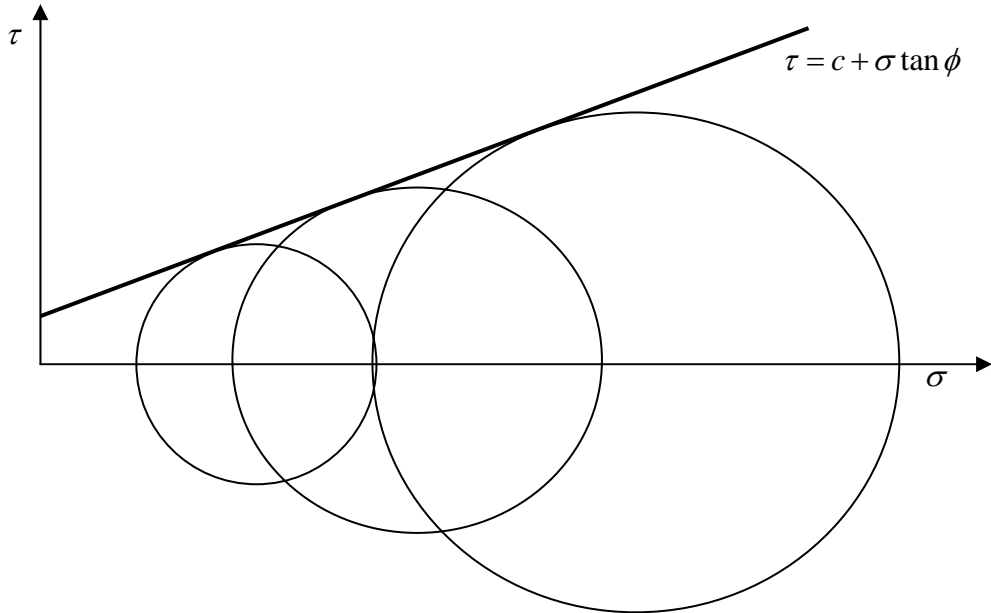
モール (Mohr) の破壊規準 :

三軸試験 (CU あるいは CD 試験) を 3 種類以上の拘束圧で実施し, それぞれについて破壊時の主応力状態を用いてモールの応力円を描いた場合, 下図のように, モールの応力円の包絡線を描くことが出来る。この包絡線は, クーロンの破壊規準と同様に, それより上の領域では, 土は壊れていることを意味しており, モールの破壊規準と呼ばれている。この図のように, 包絡線が曲線 (特に上に凸の曲線) となるのは, 不飽和土の場合に多く見られる。 (三軸試験では, 主応力しか計測していない。)



モール・クーロン (Mohr-Coulomb) の破壊規準 :

モールの破壊規準の場合と全く同様に, 三軸試験の結果からモールの応力円を描いた場合, 特に飽和土や砂の場合には, 破壊包絡線は直線となる場合が多い。その場合の直線は, クーロンの破壊規準における直線と同じものである。このように, モールの応力円の包絡線から, クーロンの破壊規準と同様の直線を引いて破壊規準を定めたものを, 2つの破壊規準をあわせてモール・クーロンの破壊規準と呼ぶ。



【モール・クーロンの破壊規準の主応力表示】

破壊規準の直線  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  上にある点  $(\sigma, \tau)$  は三軸試験の試験で計測された主応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  を用いて,

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi$$

と表すことができる。

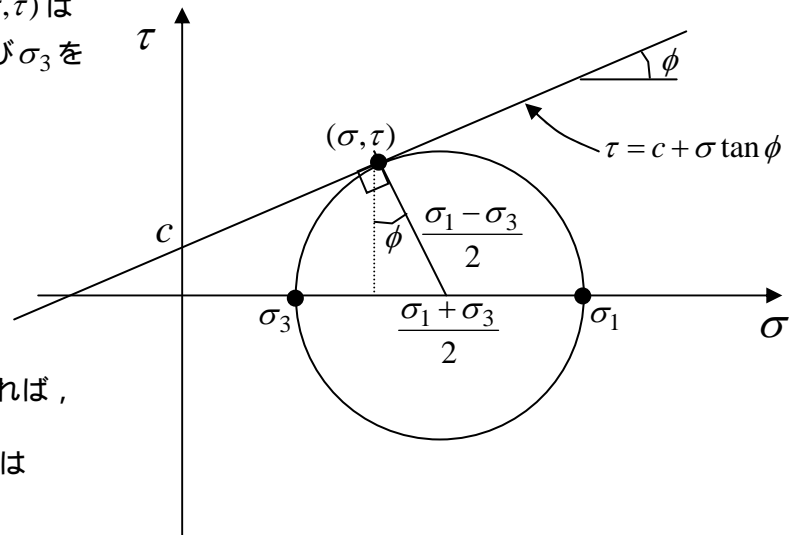
これを元の破壊規準  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  に代入すれば,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi \quad \text{または}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi$$

となる。これをモール・クーロンの破壊規準の主応力表示と呼ぶ。

もちろん, 上図の幾何学的な関係,  $(c \cot \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}) \sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  からも直接求めることができる。



【モール・クーロンの破壊規準と破壊面との関係】

砂の CD 条件の三軸試験において，モール・クーロンの破壊規準を考えた場合，破壊時の主応力が  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  だった場合に，破壊条件に達している（すなわち，破壊規準の直線上にある）垂直有効応力とせん断応力の値はそれぞれいくらになるのか考察する。また，そのような破壊規準に達している応力状態が作用する面は，水平面（すなわち最小主応力  $\sigma_3$  が作用する面）から，どれだけ傾いているのかも考察する。

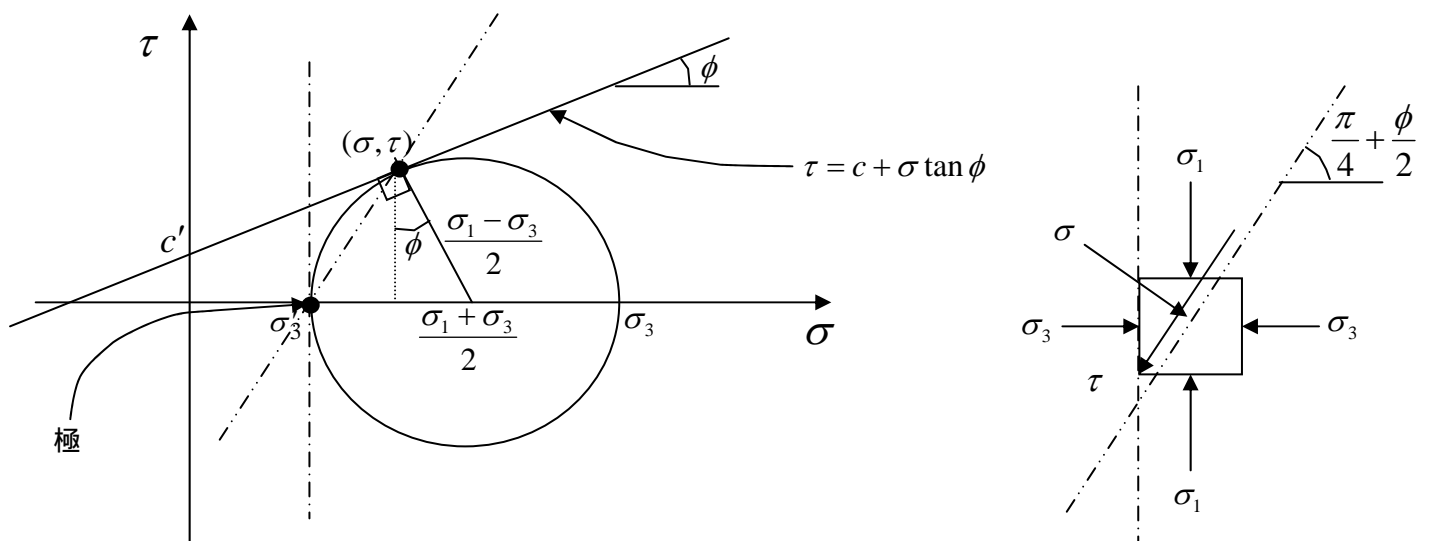
下図より，モールの応力円の幾何学的な関係から，破壊基準  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  に達している応力状態  $(\sigma, \tau)$  は，

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi, \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi$$

となる。

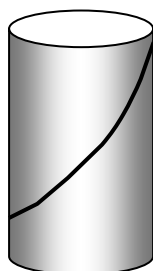
それらが働く面の方向は， $\sigma_3$  が働く最小主応力面をモールの応力円の図上に描けば， $(\sigma_3, 0)$  が極であることが求まり，その極から  $(\sigma, \tau)$  へ引いた線がその応力が働く面となる。したがって，幾何学的な関係

から，最小主応力面からは  $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ ，最大主応力面からは  $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  傾いた面となる。



この考察は非常に重要な意味がある。

このように，三軸試験では，主応力で載荷することにより，垂直応力とせん断応力の比が最も危険となる，すなわち破壊規準を満たす組み合わせとなる，応力状態が自ずと現れるようにしている。また，その応力状態が作用する面は，土のせん断抵抗角によって決まる傾きとなる。



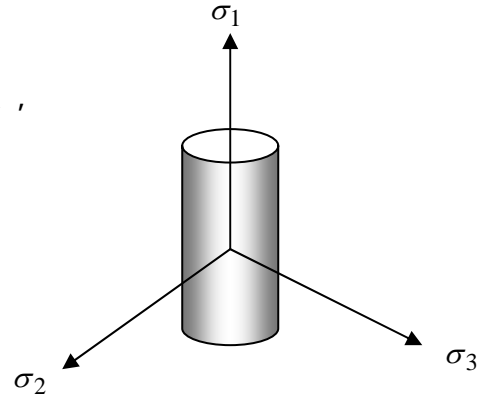
実際に三軸試験した粘土の供試体には，上の図のように「せん断面」と呼ばれる不連続面が観察される場合がある。この面の傾きは，供試体の形状や実験条件（載荷速度，排水条件等）によって変わるが， $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  に近い角度が観察されることが多い。

三軸圧縮試験後の粘土供試体

【三軸条件：三軸応力状態】

三軸とは直交する3つの主応力軸のことであった。

応力状態を図示するとき、2次元にしる3次元にしる何気なく、  
お互いの軸が直交するように描いてきた。(正方形が良い例)  
それは、応力テンソルは対称テンソル(行列)だからである。  
対称行列の各固有ベクトルはお互いに直交する性質がある。  
すなわち、主軸は直交する。応力テンソルの固有値は主応力  
であるが、要するに主応力軸は主軸そのものであり、  
お互いに直交する。



簡単のため2次元応力状態を考える。

応力テンソル $\sigma$ に2つの異なる固有値( $\sigma_1, \sigma_3$ )、固有ベクトル( $\lambda_1, \lambda_3$ )が存在したと仮定する。

この場合、( $\sigma_1, \sigma_3$ )はそれぞれ最大および最小主応力に相当し、( $\lambda_1, \lambda_3$ )は( $\sigma_1, \sigma_3$ )が作用する方向の基底ベクトルを表す。ここで( $\sigma_1, \sigma_3$ )はスカラーであり、( $\lambda_1, \lambda_3$ )はベクトルであることに注意。  
固有値の定義から、 $\sigma\lambda_1 = \sigma_1\lambda_1 \cdots$  式(1) および  $\sigma\lambda_3 = \sigma_3\lambda_3 \cdots$  式(2) である。

式(1)の両辺の左から $\lambda_3^T$ を掛けると、 $\lambda_3^T\sigma\lambda_1 = \sigma_1\lambda_3^T\lambda_1$  となるが、この式を両辺転置すると、

$\lambda_1^T\sigma\lambda_3 = \sigma_1\lambda_1^T\lambda_3 \cdots$  式(3)となる。一方、式(2)の両辺に左から $\lambda_1^T$ を掛けると、

$\lambda_1^T\sigma\lambda_3 = \sigma_3\lambda_1^T\lambda_3 \cdots$  式(4)となる。式(3)と(4)の右辺を比べると、

$\sigma_1\lambda_1^T\lambda_3 = \sigma_3\lambda_1^T\lambda_3$  となり、移項して整理すると、

$(\sigma_1 - \sigma_3)\lambda_1^T\lambda_3 = 0 \cdots$  式(5)となる。 $\sigma_1 \neq \sigma_3$ であるので、式(5)が成立するためには、

$\lambda_1^T\lambda_3 = 0$ すなわち、 $\lambda_1 \perp \lambda_3$ で無ければならない。(主軸は直交する)