

【圧密方程式の解の性質】

問題 (粘土層厚  $H$  の片面排水条件) を例にとり, 圧密方程式で得られた解の性質について説明する。

問題 (粘土層厚  $H$  の片面排水条件) に対する圧密方程式の解は, 以下ようになる。

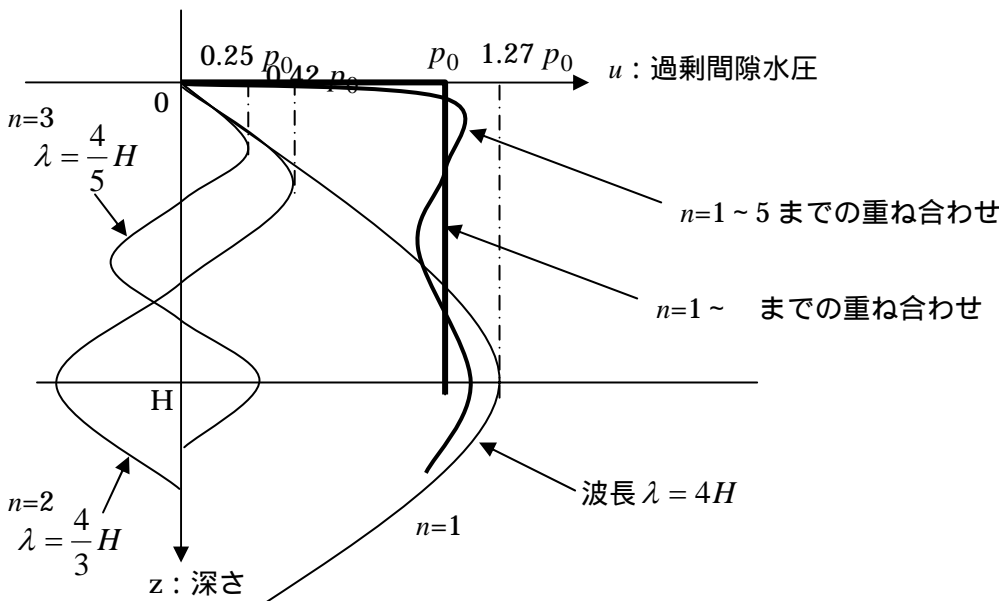
$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2H} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t\right), \quad B_n = \frac{4p_0}{(2n-1)\pi}$$

(1) 初期過剰間隙水圧分布の表現

$$u(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2H}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} n=1 & B_1 \sin \frac{\pi}{2H} z \rightarrow \frac{4p_0}{\pi} \sin \frac{\pi}{2H} z \\ n=2 & B_2 \sin \frac{3\pi}{2H} z \rightarrow \frac{4p_0}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2H} z \\ n=3 & B_3 \sin \frac{5\pi}{2H} z \rightarrow \frac{4p_0}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{2H} z \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{array} \right.$$

色々な波長の波があり, それぞれの振幅を調整して, 合成した波が初期条件を満たすようにしている。初期条件の定数は簡単そうであるが, sin 波を合成して作るには, 波長が非常に短い波まで必要とする。また, 初期条件が定数でなくても, 表現可能である。



振幅のみに注目して,  $n=5$  までを重ね合わせると,

$$\frac{4p_0}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = 1.06p_0$$

$n$  毎に波長, 振幅の異なる波の重ね合わせによって, 圧密方程式の解が表現されることがわかる。

(2)各モードの減衰

(1)で各モード( $n$  毎)の初期状態における sin 波の解のイメージがつかめたところで、今度は時間の経過につれて、それぞれのモードの解がどのように変化するか考える。

各モード  $\exp(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$  で時間変化(減衰)は支配されている。

$$\exp(\lambda_n \frac{\pi^2}{4} T_v) \quad (\text{圧密}) \text{固有値: } \lambda_n = -(2n-1)^2, \quad \text{時間係数: } T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -9 \\ \lambda_3 = -25 \\ \lambda_4 = -64 \\ \vdots \end{cases} \quad \downarrow$$

モード  $n$  が大きくなるにつれて、減衰が加速する

したがって、少し時間が経過すれば、  
圧密現象は  $n=1$  のモードによる解

$$\frac{4p_0}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2H} \exp(-\frac{\pi^2}{4} T_v) \quad \text{にほとんど支配されるようになる。}$$

(その他のモードは無視できるほど小さくなる)

逆に、圧密開始直後ほど、初期条件を満たすように高次 ( $n$  が大きい) のモードの解までが影響するために、複雑な解の構成となっており、圧密は複雑な振る舞いをして安定しづらい。

(すぐ後に勉強する) 圧密試験の整理法の  $\sqrt{t}$  法の欠点となっている。

圧密の速さは  $\exp(\lambda_n \frac{\pi^2}{4} T_v)$  , すなわち時間係数  $T_v$  によって決まる。

時間係数  $T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$  は層厚  $H$  という境界条件を含んでいるが、粘土の性質だけで考えるならば、

$H$  が同じ場合、圧密係数  $c_v$  が大きな粘土ほど圧密が速い。さらに  $c_v = \frac{k}{m_v \cdot \gamma_w}$  であるから、

透水係数  $k$  が大きく、体積圧縮係数  $m_v$  が小さい粘土(硬い粘土)ほど圧密が速い。

なお、それ以外の要因(例えば  $p_0$  の大きさ等)は圧密の速さに無関係であることに注意する。