土質力学Ⅰ及び演習（Ｂ班：小高担当）　配付資料 No.11　(2004.12.15)

【圧密方程式とその解法】

(1)瞬間載荷問題における Terzaghi の圧密方程式の誘導（今期はこれを覚えればよい）

①連続式 $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial z}$ に ②ダルシー則　$v = -k\dfrac{\partial h}{\partial z}\left(= \dfrac{k}{\gamma_w}\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ を代入して得られる

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{（式①）}$$

と

③構成式　$d\varepsilon = m_v \cdot d\sigma'$　を時間微分して得られる $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = m_v\dfrac{\partial \sigma'}{\partial t}$　に，

④時間に対して荷重（全応力）は一定という条件*（瞬間載荷問題）$\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}\left(= \dfrac{\partial \sigma'}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$ を変形した

$\dfrac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を代入して得られる，

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -m_v\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{（式②）}$$

を等値することにより（要するに式①と②の右辺どうしが＝），

Terzaghi の圧密方程式 $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = c_v\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \left(c_v = \dfrac{k}{m_v\gamma_w}\right)}$ を得る。

注意：

*力の釣り合い式 $\dfrac{\partial \sigma(z,t)}{\partial z} = 0$（自重を無視）　より，全応力$\sigma$は深さ方向に対して一定であり，$t$ のみの関数であることがわかる。そこで，Terzaghi の圧密方程式では，さらに時間に対しても全応力は一定であることを仮定するために，④の条件式がでてくる。すなわち，力の釣り合い式の $\partial\sigma/\partial z = 0$ という条件がなければ，$\partial\sigma/\partial t$ は 0 ではなく z の関数でもよいことになる。そういう点では，力の釣り合い式を暗に用いていることになっている。

(2)漸増載荷問題における三笠の圧密方程式による解法（こういう解法もあるという紹介）

(2)-1 三笠の圧密方程式

Terzaghi の圧密方程式は，時間に対して荷重は一定という特殊な条件から導かれているため，瞬間的に荷重が載荷されて，そのまま一定である問題しか扱えない。その欠点を改善したのが三笠の圧密方程式である。

力の釣り合い式　$\dfrac{\partial \sigma}{\partial z} = \dfrac{\partial \sigma'}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$　より，$\dfrac{\partial \sigma'}{\partial z} = -\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\gamma_w\dfrac{\partial h}{\partial z} = \gamma_w \cdot i$　が得られ，

ダルシー則 $v = k \cdot i$ を適用することにより，

$v=\dfrac{k}{\gamma_w}\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}$　を得る。これに，構成式　$d\varepsilon=m_v\cdot d\sigma'$　を z で微分して得られる　$\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}=m_v\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}$　を適用すれば，$v=\dfrac{k}{m_v\gamma_w}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}$　となる。これに，連続式 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial z}$ を使えば，

$\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}(\dfrac{k}{m_v\gamma_w}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z})$ となり，z に対して $\dfrac{k}{m_v\gamma_w}=c_v$ が一定と仮定すれば，

三笠の圧密方程式　$\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}$　を得る。

(2)-2　三笠の圧密方程式の漸増載荷問題への適用

三笠の圧密方程式で漸増載荷問題を解く。漸増載荷問題とは，時間の経過とともに荷重が増える問題であり，実際には瞬間載荷などあり得ないので，実問題のほとんどは漸増載荷問題である。

漸増載荷条件は　$\sigma'(z,t)+u(z,t)=P(t)$　となる。（$P(t)=0$ は瞬間載荷問題である）

上式より，$\dfrac{\partial\sigma'}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial P(t)}{\partial t}$　（式③）となる。また，力の釣り合い式より $\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}=\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ となるが，もう一度 z で微分しておくと，$\dfrac{\partial^2\sigma'}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$（式④）となる。

また，三笠の圧密方程式 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}$ に，構成式 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}=m_v\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}$ をもう一度適用すれば，

$\dfrac{\partial\sigma'}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2\sigma'}{\partial z^2}$　となるので，これに式③と④を代入すると，

結局　$\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial P(t)}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$　となる。

ここで，$u(z,t)=P(t)+V(z,t)$ とおいて変数変換してやると，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$　および　$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial P(t)}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial t}$　より

$\dfrac{\partial V}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$　と変形でき，あとは境界条件にさえ気を付ければ解くことが可能となる。

(3) Terzaghi の圧密方程式の変数分離法による解法

偏微分方程式が線形かつ同次であり，さらに境界条件式も線形かつ同次であれば，変数分離法により解析解を得ることができる。

線形： u **,** $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ **,** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ **,** $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ **の一次式で表される。**

同次： u **,** $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ **,** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ **,** $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ **のみで表される**

Terzaghi の圧密方程式　$\dfrac{\partial u}{\partial t} = c_v \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$ とおく，これを圧密方程式に代入すると，

$Z(z) \cdot T'(t) = c_v \cdot Z''(z) \cdot T(t)$　となるが，両辺にそれぞれの変数をまとめるように変形すると，

$\dfrac{1}{c_v}\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{Z''(z)}{Z(z)} = const.$　$(= -A^2)$ とおく

天下り的に，この定数は負としているが，実はこの定数が正の場合は，境界条件を満たす有意な解は得られない。試しに，正と仮定して計算してみること。

結局，以下の t, z それぞれの常微分方程式で表すことができる。

$$T'(t) = -A^2 c_v T(t) \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$Z''(z) = -A^2 Z(z) \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

①より，

$$T(t) = C_1 \exp(-A^2 c_v \cdot t)$$

②より，

$$Z(z) = C_2 \cos Az + C_3 \sin Az$$

それぞれの解の積が u の解となる。すなわち，

$$u(z,t) = (C_4 \cos Az + C_5 \sin Az) \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t)$$

次に，境界条件式および初期条件式を用いて積分定数を決定する。

問題①（粘土層厚 H の両面排水条件）

境界条件式：　$u(0,t) = u(H,t) = 0$

$u(0,t) = C_4 \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　　より　$C_4 = 0$

$u(H,t) = C_5 \sin AH \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　より，　$\sin AH = 0$

したがって，　$AH = n\pi$，　$A = \dfrac{n\pi}{H}$

整理すると解は　$u(z,t)=C\sin\frac{n\pi}{H}z\exp(-\frac{n^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$　となる。

一般解は，任意の n の解の重ね合わせで表すことができるので，

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{H}z\exp(-\frac{n^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$$

となる。

さらに，初期条件式を使って，定数係数 B_n を求める。

初期条件式　$u(z,0)=P_0$　から，

$$u(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{H}z=P_0$$

両辺に，$\sin\frac{n\pi}{H}z$ を掛けて 0 から H まで z で積分する。

$$\int_0^H\{(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{H}z)\sin\frac{n\pi}{H}z\}dz=\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz$$

直交関数の定理*より，

$$\int_0^H(B_n\sin\frac{n\pi}{H}z\cdot\sin\frac{n\pi}{H}z)dz=\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz$$

$$B_n\cdot\frac{H}{2}=\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz$$

$$B_n=\frac{2}{H}\cdot\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz=\frac{2P_0}{H}\left[-\frac{H}{n\pi}\cos\frac{n\pi z}{H}\right]_0^H$$

$$=\frac{2P_0}{H}(-1)\frac{H}{n\pi}\{(-1)^n-1\}=\frac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1}+1\}$$

*直交関数の定理

$$\int_0^1\sin m\pi x\sin n\pi x dx=\frac{1}{2}\delta_{mn}$$

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1\ (m=n\text{のとき})\\0\ (m\neq n\text{のとき})\end{cases}$$

最終的に問題①（粘土層厚 H の両面排水条件）に対する圧密方程式の解は，

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1}+1\}\sin\frac{n\pi z}{H}\exp(-\frac{n^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4P_0}{(2m+1)\pi}\sin\frac{(2m+1)\pi z}{H}\exp(-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$$

(4)　各種境界条件下での Terzaghi の圧密方程式の解

問題②（粘土層厚 H のを片面排水条件）

$u(z,t)=(C_1\cos Az+C_2\sin Az)\cdot\exp(-A^2c_v\cdot t)$　までは，境界条件，初期条件に拘わらず同じ。

境界条件式：　$u(0,t)=\dfrac{\partial u(H,t)}{\partial z}=0$

$u(0,t)=C_1\cdot\exp(-A^2c_v\cdot t)=0$　　より　$C_1=0$

$\dfrac{\partial u(H,t)}{\partial z}=AC_2\cos AH\cdot\exp(-A^2c_v\cdot t)=0$　より　$\cos AH=0$

したがって，　$AH=\dfrac{2n-1}{2}\pi$ ，　$A=\dfrac{(2n-1)\pi}{2H}$

整理すると解は　$u(z,t)=C\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2H}z\exp(-\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)$　となる。

重ね合わせにより一般解は,

$$\boxed{u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z\exp(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)}$$ となる。

境界条件を満足する様々な波長の波を合成しており，それぞれの波の振幅 B_n を調整することにより，あらゆる初期条件（関数）にも対応できる。

→フーリエ級数があらゆる関数を近似できるという素晴らしい特性

n の値に注意する

初期条件式　$u(z,0)=P_0$　から，　$u(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2H}z=P_0$

両辺に，$\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2H}z$ を掛けて 0 から H まで z で積分する。

$$\int_0^H\{(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z\}dz=\int_0^H(P_0\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z)dz$$

直交関数の定理*より ,

$$\int_0^H B_n\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2H}zdz=\int_0^H P_0\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}zdz$$

それぞれの波の振幅 B_n をこのように決めたことにより，$u=p_0$（定数）を表現できる。

$$B_n\cdot\frac{H}{2}=\int_0^H(P_0\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z)dz=\frac{2HP_0}{(2n-1)\pi}$$　　より　$$\boxed{B_n=\frac{4P_0}{(2n-1)\pi}}$$

最終的に粘土層厚 H の片面排水条件に対する圧密方程式の解は,

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4P_0}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\exp(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4P_0}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2H}\exp(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 \frac{c_v \cdot t}{H^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v)$$

（ただし， $M = \dfrac{(2n+1)}{2}\pi$ ， $T_v = \dfrac{c_v \cdot t}{H^2}$ ， $Z = \dfrac{z}{H}$ ）

問題③　粘土層厚 2H の両面排水条件

境界条件式：　$u(0,t) = u(2H,t) = 0$

$u(0,t) = C_1 \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　　より　$C_1 = 0$

$u(2H,t) = C_2 \sin 2AH \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　より　$\sin 2AH = 0$

したがって，　$2AH = n\pi$ ，　$A = \dfrac{n\pi}{2H}$

整理して重ね合わせにより一般解は，$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \dfrac{n\pi}{2H} z \exp(-\dfrac{n^2\pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$　となる。

初期条件式　$u(z,0) = P_0$　から，　$u(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \dfrac{n\pi}{2H} z = P_0$

両辺に，$\sin \dfrac{n\pi}{2H} z$ を掛けて 0 から $2H$ まで z で積分する。

$$\int_0^{2H} \{(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{2H} z) \sin \frac{n\pi}{2H} z\} dz = \int_0^{2H} (P_0 \sin \frac{n\pi}{2H} z) dz$$

直交関数の定理*より，

$$\int_0^{2H} B_n \sin^2 \frac{n\pi}{2H} z dz = \int_0^{2H} P_0 \sin \frac{n\pi}{2H} z dz$$

$B_n \cdot H = \dfrac{2HP_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1} + 1\}$　　より　$B_n = \dfrac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1} + 1\}$

最終的に粘土層厚 $2H$ の両面排水条件に対する圧密方程式の解は，

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1} + 1\} \sin \frac{n\pi z}{2H} \exp(-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4P_0}{(2m+1)\pi} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \exp(-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

ここで，$M = \dfrac{(2n+1)}{2}\pi$ ，$T_v = \dfrac{c_v \cdot t}{H^2}$ ，$Z = \dfrac{z}{H}$　とおけば，

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v)$$

となり，**層厚 H の片面排水の解と同一であることがわかる。**　（終わり）

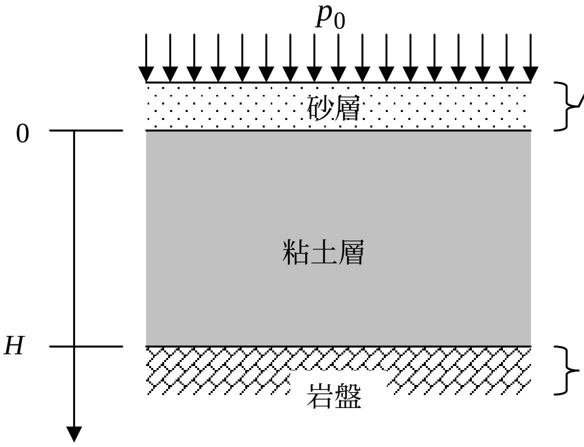
この結果より，圧密方程式の解を用いる場合は，**排水長（排水距離）:**H における**片面排水条件**を基本とすることに注意。

(5)　圧密方程式の初期条件，境界条件と等時曲線

圧密方程式の解法がわかったところで，もう一度，初期条件，境界条件について復習する。

①圧密方程式の初期条件，境界条件（圧密方程式と言えば暗黙に Terzaghi の圧密方程式である）

両面排水条件でも，排水距離が半分の片面排水条件と同じ解であることがわかったので，ここでは層厚 H の粘土層の片面排水条件の問題について考える。また，境界条件，初期条件と言っているが，解くべきものは過剰間隙水圧（静水圧からの変動分の水圧）なので，当然過剰間隙水圧に関する境界条件と初期条件である。



砂層は伝統的に，排水条件（すなわち過剰間隙水圧 $u = 0$）を表すために用いられる。
厚い砂層でなければ※，上載荷重がそのまま粘土層に伝わると考えて良く，粘土層の圧密現象を考える上では，排水の境界条件を与える役割だけであり，事実上無視する。
また，砂の圧縮量は粘土の圧密変形に比べて非常に小さいので無視することも暗黙の了解になっている。

岩盤は伝統的に，非排水条件（すなわち流速 $v = 0$）を表すために用いられる。
また，非常に硬いので，それ以下の層は圧縮変形しない（すなわち粘土の圧密変形＝地表面沈下）という，暗黙の了解を含んでいる。

圧密方程式　$\dfrac{\partial u}{\partial t} = c_v \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$　を解くために，境界条件を設定するが，境界は粘土層の上下端に 2 つの境界があるため，2 つ設定することができる。

上端：$u(0,t) = 0$，上端は砂層に接しているために，時間に無関係に過剰間隙水圧は常にゼロとする。

下端：$\left.\dfrac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$，下端は岩盤に接しており，岩盤は暗黙に不透水と仮定されるため，時間に無関係にその境界においては，常に流速 $v = 0$ とする。

すなわち，$v = ki = -k\dfrac{\partial h}{\partial z} = -\dfrac{k}{\gamma_w}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ より，冒頭の境界条件を得る。

次に初期条件を設定する。
Terzaghi の圧密方程式の大きな仮定は，「圧密荷重は瞬間的に載荷されて，ずっとその載荷重が一定のまま継続される」というものである。何度も例題で仮定したように，載荷直後は粘土から排水されないために，荷重の増分（すなわち全応力の増分）はすべて間隙水圧が増加することになる。間隙水圧は，荷重増分 p_0 と同じだけ増加するが，その増加分が「**過剰間隙水圧**」に他ならない。すなわち，過剰間隙水圧の初期条件は，粘土層全体で同一であり，

$$u(z,0) = p_0$$

となる。
問題を極端に表現すれば，載荷完了までは粘土層から水の出入りがないように，粘土層上端に遮水性のゴム膜を張っておき（初期条件），圧密開始と同時に，荷重を載せたまま，「いち，にい，のさん」でゴム膜を瞬間的にはずす（境界条件）ようなイメージである。

まとめると，「前ページのように片面排水条件が仮定できる層厚 H の粘土層に，上載荷重 p_0 が瞬間的に載荷されて，そのまま維持されたときの圧密現象の初期値・境界値問題」は，

圧密方程式：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$　　境界条件式：$u(0,t)=0$ および $\left.\dfrac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right\|_{z=H}=0$ 初期条件式：$u(z,0)=p_0$

となる。

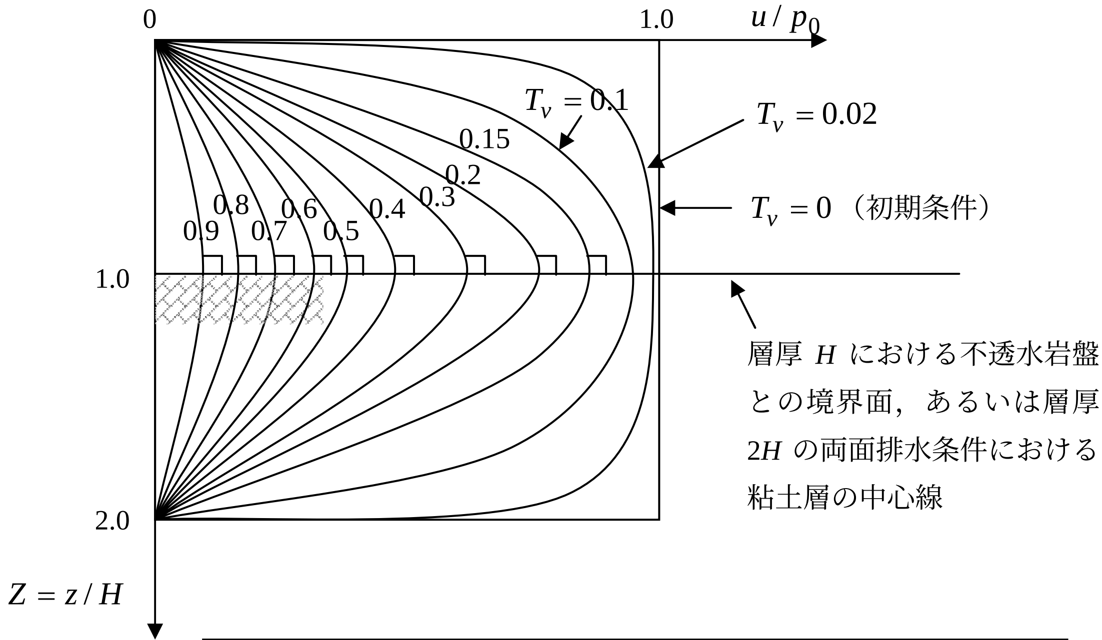
これを解くと，

$$u(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2P_0}{M}\sin MZ\exp(-M^2T_v)\qquad （ただし，M=\frac{(2n+1)}{2}\pi，T_v=\frac{c_v\cdot t}{H^2}，Z=\frac{z}{H}）$$

が得られる。（層厚 $2H$ の両面排水条件での解と全く同じ）

②過剰間隙水圧の等時曲線

以上の結果を，u/p_0 を横軸に，$Z=z/H$ を縦軸に，適当な時間係数 T_v の間隔で図示する。



注：上図は精密に計算した結果ではなく，イメージ図なので，多少本物よりズレがあります。詳細は他の専門書で見ること。

上のような図を，**等時曲線**（Isochrones:英語読みは**アイソクローン**）と言う。

前ページ※

粘土層の上の砂層が厚い場合は，上載荷重が砂層において分散すると仮定して計算する場合もある。分散の度合いは場合によって異なるので，その都度仮定する。普通は，分散されて直接粘土層上端に加わる載荷重を別途計算して，圧密の沈下量の計算を行う。（右図は分散して載荷面積が増えるために，粘土層に直接作用する圧力は，砂層に載荷される圧力より小さくなるという仮定。2 次元的な仮定もあれば，3 次元的な仮定もあるので注意する。）