土質力学Ⅰ及び演習（B班：小高担当）　配付資料 No.7　(2004.12.8)

【全応力，有効応力，間隙水圧】

0.応力について：

「土の圧縮と圧密」の単元では，一次元の力学に限定して議論する。多次元の力学は「強度と破壊理論」以降で取り扱い，応力についてもそこでもう一度本格的に学ぶ。したがって，この単元での応力（圧縮を正）は，図１のように定義されるものであり，単位面積当たりの力とほぼ等価であると考えてよい。

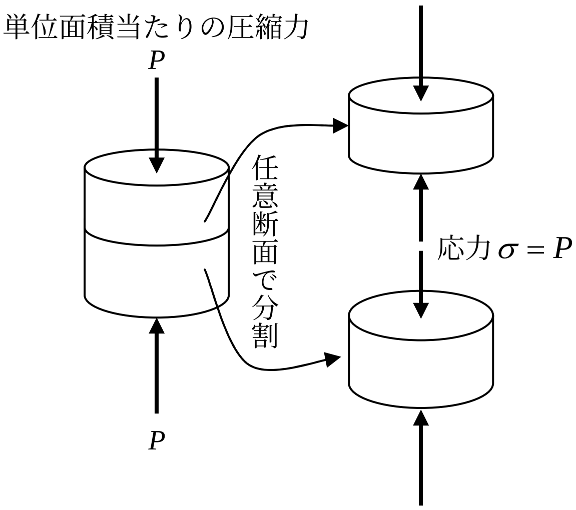


図 1

> 正確には，応力 σ は位置 z のスカラー関数 $\sigma(z)$ であり，位置 z の任意断面には，断面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ をかけたベクトル $\mathbf{t}=\sigma(z)\cdot\mathbf{n}$ が作用している。この $\mathbf{t}$ が応力ベクトルと呼ばれるもので，外力とつり合う。$\sigma(z)$ はスカラー量であり，力のようなベクトル量では無いことに注意する。しかし，便宜的には左図のように，σ をベクトルのように矢印で示すことがよくある。
> （多次元の場合は，σ はスカラー量を成分に持つテンソル量となる。これについては，「強度と破壊理論」で詳細に説明する）

1．有効応力の原理（Terzaghi テルツァギー）

$$\sigma \; = \; \sigma' + \; u$$

全応力　＝ 有効応力＋ 間隙水圧

全応力　：上で説明したような外力と釣り合う普通の応力。土質力学では，有効応力と間隙水圧に分割して考える場合には, わざわざ「全(total)」をつけて全応力(total stress)と呼ぶ。外力との釣り合いから計測することが可能。

間隙水圧：飽和土中の水圧。マノメータ（後述）を挿入して直接計測することが可能。

有効応力：全応力から間隙水圧を差し引いた応力。詳細はこれから説明。

2．飽和土の水中単位体積重量の再考察【講義では説明省略】

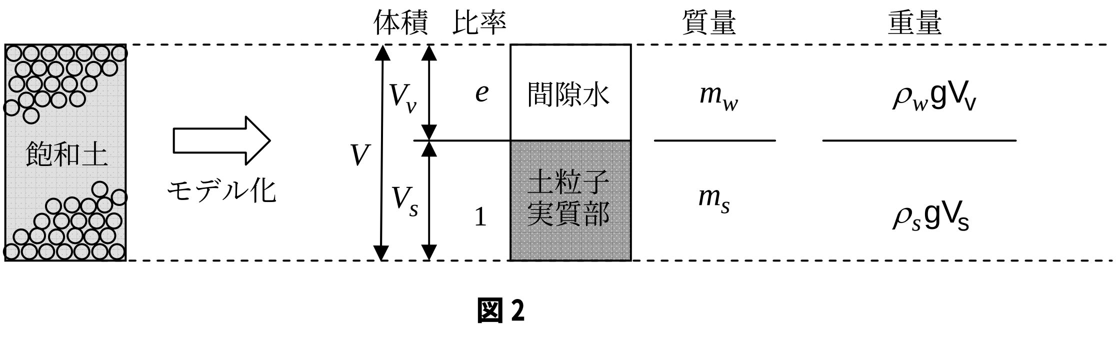


図 2

飽和土全体(tatal)の単位体積重量は

$$\gamma_t(=\rho_t\cdot \mathrm{g})=\frac{\rho_s \mathrm{g} \mathrm{V_s}+\rho_w \mathrm{g} \mathrm{V_v}}{\mathrm{V_s}+V_v}=\frac{\gamma_s \mathrm{V_s}+\gamma_w \mathrm{V_v}}{\mathrm{V_s}+V_v}=\frac{\gamma_s+\gamma_w\cdot \mathrm{e}}{1+e}=\gamma_s\left(\frac{1}{1+e}\right)+\gamma_w\left(\frac{e}{1+e}\right)$$

飽和土の場合　$\gamma_t=\gamma_{sat}$ であるが, ここでは γ_t のまま書いておく

間隙比 e の代わりに間隙率 $n(=\dfrac{e}{1+e})$ を用いれば,

$$\gamma_t=\gamma_s(1-n)+\gamma_w n$$

となるが，どちらにせよ，γ_s，γ_w には係数がくっついている。
では，係数をとってしまって，

$$\gamma_t=\gamma'+\gamma_w$$

$\leftarrow \sigma=\sigma'+u$ の形になっていることに注意

と書けば，この γ' はどのような単位体積重量を意味するのか？
（この γ' の考察が，有効応力 σ' の考察へ直接結びつく）

実は添え字の t は wet の t である。wet の w にすると，water と一緒になってしまうために t を用いる。別にどちらでもいい。

2.1　水槽に沈めた飽和土塊の重量　**（以下の議論では全部飽和土の話なので $\gamma_t=\gamma_{sat}$　全(total, t)の意味を大事にして，あえて γ_t のまま使用している）**

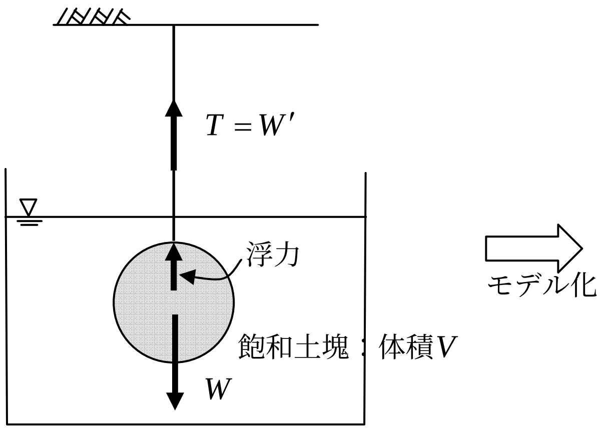


図 3

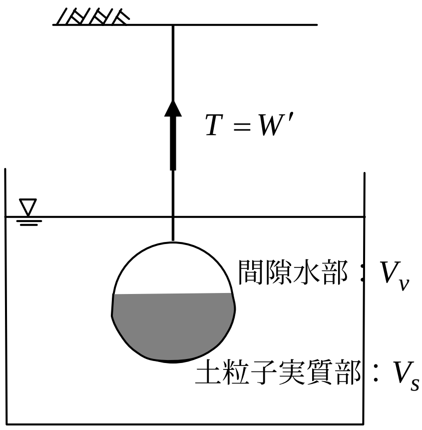


図 4

図 3 のように, 飽和土をそのまま袋に詰めて水槽に沈めた場合に, つり下げたヒモに作用する重量 W' は,
全重量 $W=\gamma_t V$ から浮力 $\gamma_w V$ を差し引くことにより,

$$W'=\gamma_t V-\gamma_w V=(\gamma_t-\gamma_w)V=\gamma' V \quad よって, \quad \frac{W'}{V}=\gamma'=\gamma_t-\gamma_w$$

すなわち，γ' は飽和土の水中単位体積重量である。

次に図 4 のように，飽和土が袋の中で間隙水と土粒子実質部（隙間なし）の状態に完全に分かれたとすれば，つり下げたヒモに作用する重量 W' は,

$$W'=\underline{(\gamma_w-\gamma_w)V_v}+(\gamma_s-\gamma_w)V_s=(\gamma_s-\gamma_w)V_s$$

（間隙水の重量は水中ではゼロ）

したがって，単位体積当たりの重量は，

$$\frac{W'}{V}=(\gamma_s-\gamma_w)\frac{V_s}{V}=(\gamma_s-\gamma_w)(\frac{1}{1+e})=\frac{\gamma_s}{1+e}-\frac{\gamma_w}{1+e}$$

$$=\underbrace{\frac{\gamma_s}{1+e}+\frac{e\cdot\gamma_w}{1+e}}_{\gamma_t}-\underbrace{\frac{e\cdot\gamma_w}{1+e}-\frac{\gamma_w}{1+e}}_{\gamma_w}$$

$$=\quad \gamma_t \quad - \quad \gamma_w \quad =\gamma'$$

つまり，γ' は V 全体に均質に分布する土粒子の集合（隙間あり）を水中で支えている重量である。

結局，飽和土の全重量 W は　$W=\gamma_t V=(\gamma'+\gamma_w)V=\gamma' V+\gamma_w V$　と表され，

・V が全部土（隙間あり）とした時の土の水中での重量　$\gamma' V$　と
・V が全部水とした時の水の重量　$\gamma_w V$　との和となる。

V を全部水，あるいは全部土と考えて重量を定義することが重要

γ' は有効単位体積重量とも呼ばれる。

3．全応力，有効応力，間隙水圧

3.1　有効応力は何に対して有効か？

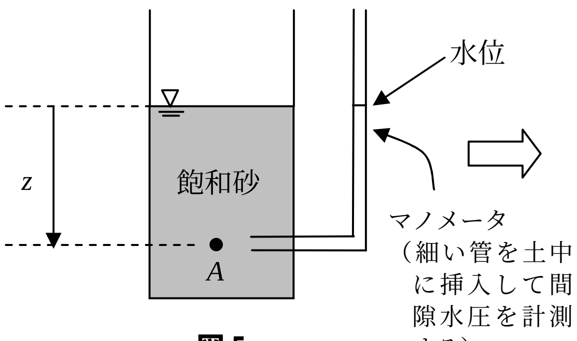


図 5

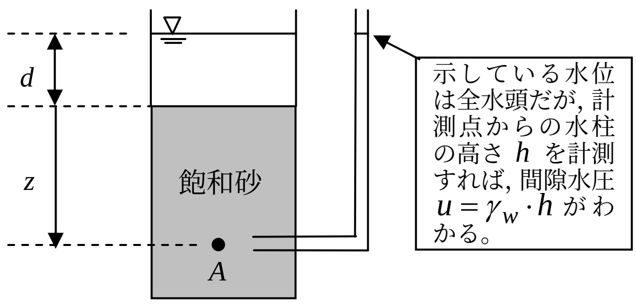


図 6

図 5 のように，飽和砂の中の深さ z の A 点での応力を調べる。1 次元場なので，ここでの応力は単位面積当たりに作用する力と考えてもまあ良い。

この問題では外力は自重 γ_t しか考えていないので，A 点に作用する全応力（すなわち外力と釣り合う応力）は，深さ分の重量が加わっているとして，$\sigma=\gamma_t\cdot z$ となるが，

$$\sigma=\gamma_t\cdot z=\gamma'\cdot z+\gamma_w\cdot z$$

$$=\ \sigma'\ +\ u$$

ここで，間隙水圧 u はマノメータによって，直接計測することが出来る量であり，$u=\gamma_w\cdot z$ となるこ

とは自明なので，有効応力σ'が水中単位体積重量γ'を用いて，$\sigma' = \gamma' \cdot z$となることがわかる。
次に，**図 6** のように水位を d だけ上昇させたとする。直感的に砂には何の変化も起きないことはわかるはず。では，なぜ起きないかを考察する。

水位上昇後の A 点での全応力は，水位分の応力の増加があるので，

$$\sigma = \gamma_t \cdot z + \gamma_w \cdot d$$
$$= \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot z + \gamma_w \cdot d = \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot (z+d)$$

ここで，$\gamma_w \cdot (z+d)$は水位上昇後にマノメータで計測される間隙水圧uに等しいので，結局

$$\sigma = \sigma' + u$$

と書くことができる。
水位上昇前後での有効応力σ'と間隙水圧uを整理すると，

水位上昇前 $\begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot z \end{cases}$ 　水位上昇後 $\begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot (z+d) \end{cases}$

結局，水位上昇前後では間隙水圧のみが変化し，有効応力は全く変化していないことがわかる。
有効応力が変化しないので，砂には何も変化（変形）が起こらない。

したがって，**有効応力σ'の変化のみが，土の変形に有効な応力変化となる。** **←有効応力の原理**

3.2　有効応力の変化と土の変形

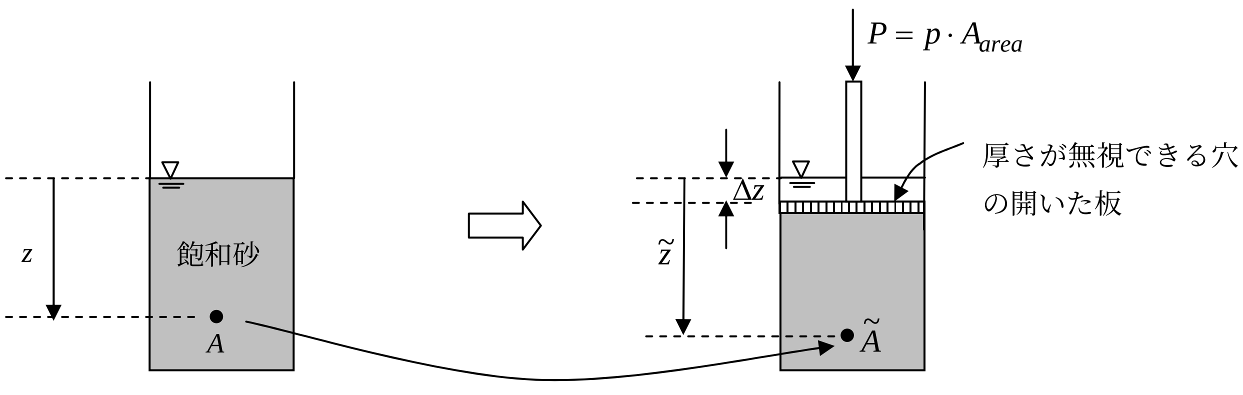


図 7　　**図 8**

次に，厚さが無視できる穴の開いた板を介して，飽和砂を p（単位面積当たり）の力で圧縮する。
この場合に砂に変化が生じる（すなわち圧縮する）ことは直感的にわかるはず。

この時の応力状態を調べる。
載荷前（すなわち**図 7** の状態）での深さ z での応力状態は **3.1** の例題と同じ。すなわち，

$$\sigma = \gamma_t \cdot z = \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot z = \sigma' + u$$

載荷後（すなわち**図 8** の状態）での深さ z での全応力 σ は,

$$\sigma = \tilde{\gamma}_t \cdot (z - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z = \tilde{\gamma}' \cdot (z - \Delta z) + \gamma_w \cdot (z - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z$$
$$= \tilde{\gamma}' \cdot (z - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot z$$

ここに，$\tilde{\gamma}_t$ および $\tilde{\gamma}'$ は，それぞれ圧縮により砂が詰まった効果を考慮した飽和単位体積重量および水中単位体積重量。

また，$\gamma_w \cdot z$ は間隙水圧 u であることは自明なので，深さ z における有効応力 σ' は,

$$\sigma' = \tilde{\gamma}' \cdot (z - \Delta z) + p$$

となる。

もし，$\Delta z = 0$　すなわち，圧縮量が無視できるほど小さいと仮定できれば，単位体積重量も変わらず $\tilde{\gamma}' = \gamma'$ となり，結果として上の式は

$$\sigma' = \gamma' \cdot z + p$$

となり，載荷重 p の分だけ有効応力 σ' が増加するので砂は変形したと議論することができ，簡単である。大筋はこれで良いのだが，土は実際圧縮するので，もう少しだけ厳密に議論する必要がある。

載荷による圧縮によって，A 点は深さ $\tilde{z}$ の $\tilde{A}$ 点に移動するので，その点での応力状態を調べる

$\tilde{A}$ 点での全応力は

$$\sigma = \tilde{\gamma}_t \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z = \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + \gamma_w \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z$$
$$= \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \tilde{z}$$

$\gamma_w \cdot \tilde{z}$ がマノメータで計測できる間隙水圧 u であることは明らかなので，$\tilde{A}$ 点で有効応力 σ' は

$$\sigma' = \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p$$

ここで，圧縮前後の土の領域での質量保存を考慮すれば，γ' と $\tilde{\gamma}'$ の間の関係は,

$$\gamma' \cdot z = \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z)$$

であるため，結局

$$\sigma' = \gamma' \cdot z + p$$

となり，やはり載荷重 p の分だけ有効応力が増加したために，土は変形（圧縮）した。

載荷前後における同じ土の点（すなわち A 点と $\tilde{A}$ 点）での有効応力 σ' と間隙水圧 u を整理すると,

載荷前 $\begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot z \end{cases}$　　載荷後 $\begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z + p \\ u = \gamma_w \cdot \tilde{z} \end{cases}$

以上で重要なことは，圧縮を考慮したところで，着目している土の有効応力は，圧縮量を無視した場合と同じ結果となることである。

したがって，地盤内の応力状態の変化を議論する場合には，（最も重要な有効応力に関する結果は同となるから）圧縮量を無視する場合が多いので注意する。

4．粘土の圧密

3.2 の例題では，載荷される土が「飽和砂」だったために，圧縮は瞬時に終わった。しかし，土が「飽和粘土」だったら，どのようなことが起こるか？

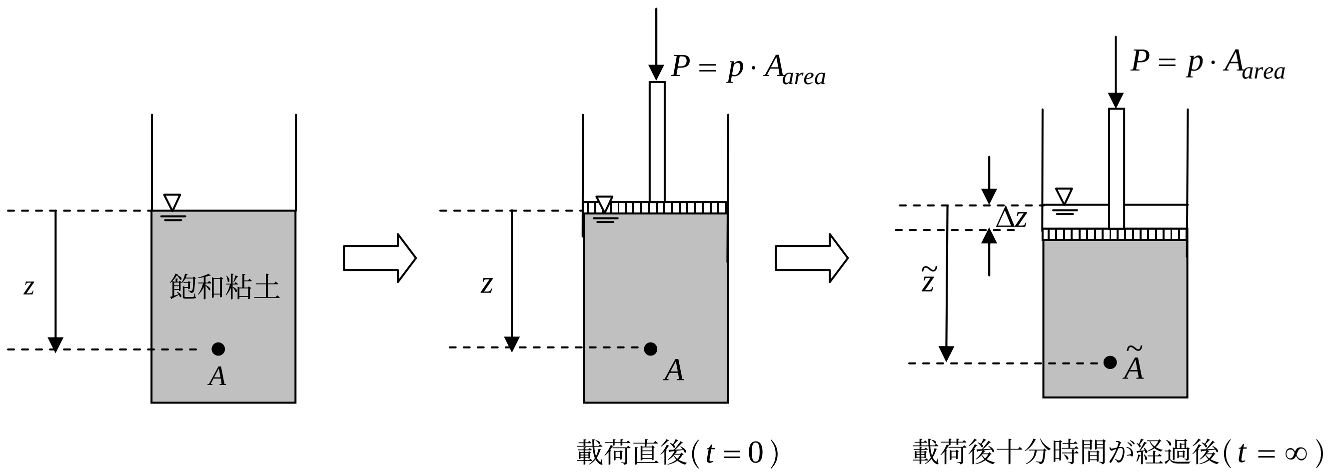


図 9

粘土の透水係数は非常に小さいために，排水に時間を要する。そのため，載荷直後には全く圧縮（変形）は生じないが，時間の経過とともに徐々に圧縮し，最終的に$t = \infty$において，前例 **3.2** の砂と同様の応力状態となる。

したがって，　載荷前後における同じ土の点（すなわちA点と$\tilde{A}$点）での有効応力σ'と間隙水圧uを整理すると，

$$\text{載荷前}\ \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot z \end{cases} \qquad \text{載荷直後}\ \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot \tilde{z} + p \end{cases} \qquad t = \infty\ \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z + p \\ u = \gamma_w \cdot \tilde{z} \end{cases}$$

載荷直後には変形が生じないので，有効応力の変化も無いと考える。その際，載荷重pによる全応力の増分は，すべて間隙水圧の増分となる。

このような，粘土の透水性の低さに起因する，時間遅れの圧縮変形を「圧密」と呼ぶ。

上の粘土の（圧密）問題においては，全応力位置zのみの関数で時間には無関係（すなわち一定）であったが，有効応力と間隙水圧は，位置zとともに，時間tの関数になることに注意する。　→　圧密理論で詳しく説明する。

5．地盤内の応力分布

今までの **3** の例でも **4** の例でも，地盤内のある点での応力について議論したが，地盤内の応力分布はどうなっているのか？

図 5 および**図 6** の例では，深さ z の点での全応力は，

水位上昇前　$\sigma = \gamma_t \cdot z$，　　水位上昇後　$\sigma = \gamma_t \cdot z + \gamma_w \cdot d$

となっていたが，これは任意の深さ z での全応力と考えて良く，**図 10** のような直線分布となる。

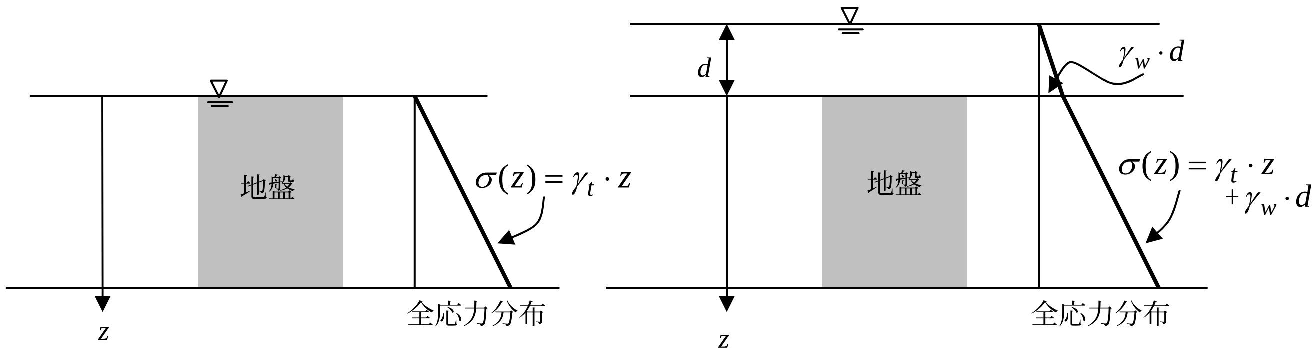


図 10

さらに詳細な議論は，力の釣り合い式から考える必要がある。

1 次元の力の釣り合い式は，図 11 のように自重が作用するとして微小距離 dz での全応力増分を求め，力の釣り合いを考えれば

$$\left(\sigma(z) + \frac{d\sigma}{dz}dz\right) - \sigma(z) = \gamma_t \cdot dz$$

すなわち，力の釣り合い式は次式となる。

$$\frac{d\sigma}{dz} = \gamma_t$$

地盤内の全応力分布を求めるには，z で積分すれば，

$$\sigma(z) = \gamma_t \cdot z + C$$

となり，直線分布となることは明らかである。

図 10 の水位上昇前の場合には，境界条件が $\sigma(0) = 0$ であるので，$C = 0$ である。

水位上昇後の場合には，境界条件が $\sigma(0) = \gamma_w \cdot d$ であるので，結果として

$$\sigma(z) = \gamma_t \cdot z + \gamma_w \cdot d$$

となる。

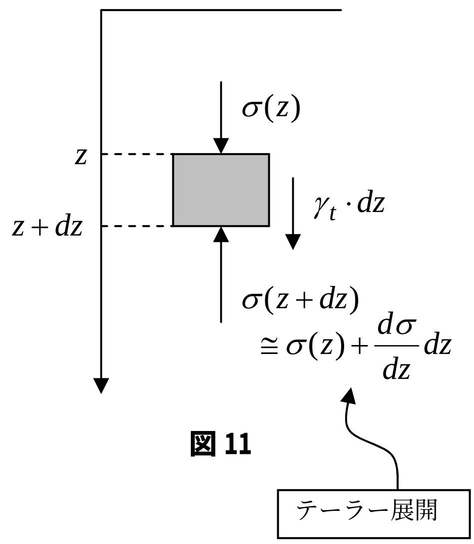


図 11

地盤内の応力分布を求めるポイント

① 自重が作用する１次元場での全応力分布は直線分布となる。（地層毎に γ_t が異なれば，地層毎に直線の勾配は異なり，折れ線の分布図になる）

② 間隙水を含む土全体の単位体積重量 γ_t（飽和土の場合 γ_{sat}）は計測可能（既知の値）であるので，全応力分布は必ず求められる。

③ 十分時間が経過している状態（定常状態）の間隙水圧分布は既知である（通常は直線の静水圧分布をしている）。

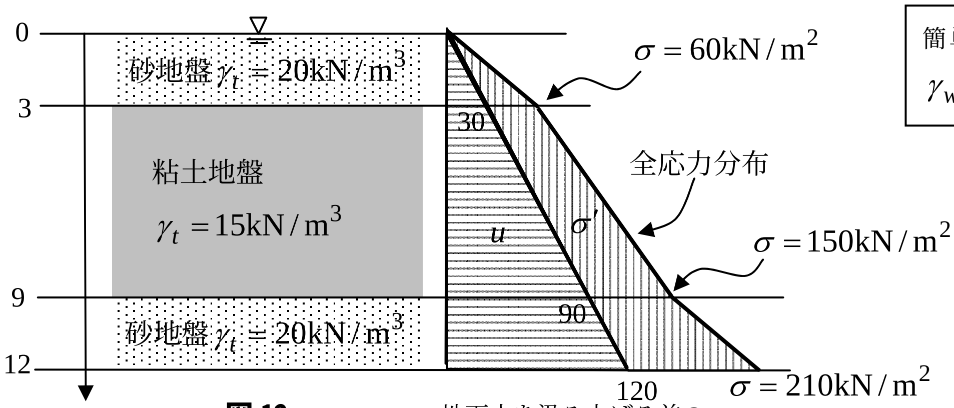
④ 全応力分布と間隙水圧分布より，有効応力分布が求められる。

⑤ 砂地盤は透水係数が大きいため，瞬時に吸排水して圧縮（あるいは膨張）が起こりうる。すなわち，有効応力の変化が瞬時に起こる（と考えても良い）。

⑥ 粘土地盤は透水係数が小さいため，吸排水には時間を要し，すぐには圧縮（あるいは膨張）などの変形はしない。すなわち，載荷直後には有効応力の変化はない（と考える）。

例題（地下水くみ上げによる地盤沈下）

図 12 のような地盤があり，最下層の砂層には静水圧の地下水がある。今，その砂層から**図 13** に示すように井戸で地下水を大量に汲み上げたとし，最下層の砂層全域での間隙水圧が 30kN/m^2 になるまで低下させたとする。その時の，地下水汲み上げ開始直後と汲み上げ続けて 30kN/m^2 に維持したまま十分時間が経過した時の，地盤内の全応力，有効応力，間隙水圧分布を示しなさい。



簡単のため，水の単位体積重量 $\gamma_w = 10\text{kN/m}^3$ とする。

ここでは，σ の分布の中で σ' と u の分布の割合を示したが，それぞれ別々に分布を示す方が適切な場合もある。（本質は当然同じ）

図 12

地下水を汲み上げる前の地盤の初期状態

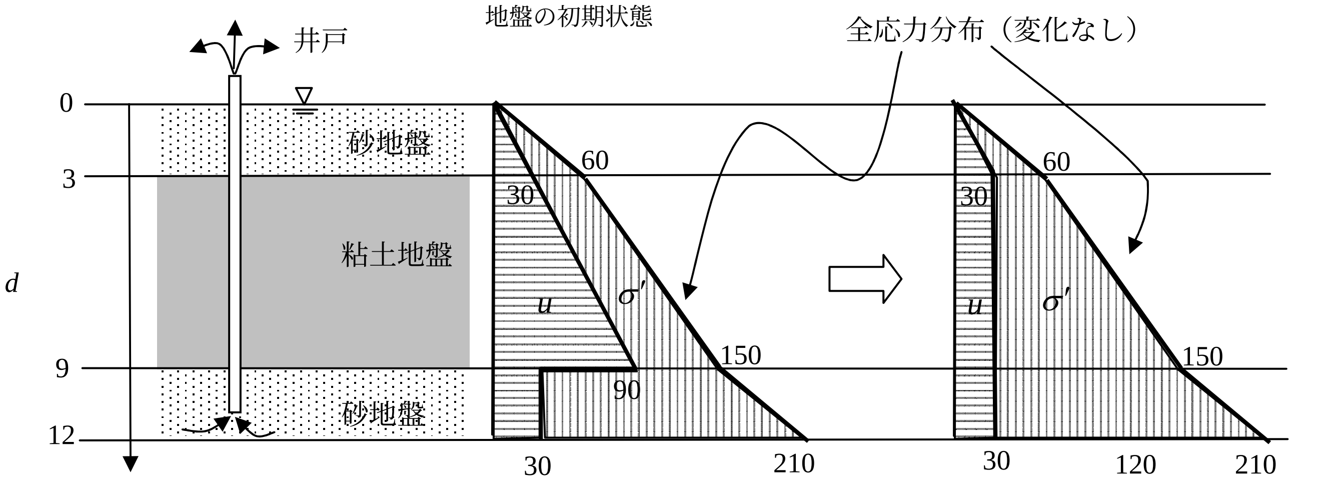


図 13

地下水を汲み上げ開始直後（粘土層の有効応力は変化なし）

地下水を汲み上げから十分に経過（粘土層の有効応力が増加→圧密沈下）