土質力学Ⅰ及び演習（Ｂ，Ｃ班合同授業：小高担当）　配付資料№.5　(2004.11.24)

【2次元フローネット解析の補足】

(1)ラプラスの式

多次元浸透場での連続式は　$\mathrm{div}\mathbf{v}=0$　となる成分表示すると

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

ただし，$\mathbf{v}=\begin{Bmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{Bmatrix}$は，ダルシー則に従い，$V_x=-k_x\dfrac{\partial h}{\partial x}$，$V_x=-k_y\dfrac{\partial h}{\partial y}$，$V_x=-k_z\dfrac{\partial h}{\partial z}$

ここに，hは全水頭である。透水係数が全領域で等しく一定（$k=k_x=k_y=k_z=\mathrm{const.}$）とし，ダルシー則を式(1)に代入すると，次式のラプラスの式を得る。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0 \qquad (2)$$

(2)ポテンシャルと流れ関数

以下，簡単のため2次元で議論する。

関数$f(w)=\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)$を考える。ただし，$w=x+iy$（複素数）である。

関数$f(w)$が正則, すなわち微分可能であるための必要十分条件は, コーシー･リーマンの関係式より,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad (3)$$

である。便宜上，複素数を使っているが，要するに，$\Phi(x,y)$と$\Psi(x,y)$の2変数関数がそれぞれ，どのような経路で(x,y)に近づけた時にも，それぞれ同じ値に収束することを意味する。

ここで，$\Phi(x,y)$と$\Psi(x,y)$にそれぞれ，次式を適用すると，

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0 \qquad (5)$$

となり，$\Phi(x,y)$も$\Psi(x,y)$もラプラスの式を満たすことがわかる。

式(1)より全水頭hはラプラスの式を満たすポテンシャルであるので，式(4)と見比べてΦはhに等しいと仮定する。ではその場合，Ψはどのような性質を持つ関数となるのか考察する。

Ψの全微分を考えると,

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial x}dy=-\frac{\partial h}{\partial y}dx+\frac{\partial h}{\partial x}dy=\frac{1}{k}(V_y dx-V_x dy) \qquad (6)$$

となる。$\Psi=\mathrm{const.}$上では，$d\Psi=0$となるので,

$$(V_x dx-V_y dy)_{\Psi=\mathrm{const.}}=0 \quad すなわち，\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\mathrm{const.}}=\frac{V_y}{V_x} \qquad (7)$$

上式は，$\Psi=\mathrm{const.}$の線の接線dy/dxが　V_y/V_xに等しいことを意味しており，$\Psi=\mathrm{const.}$線が流線そのものであることを示す。ここで，Ψを流れ関数と呼ぶことにする。

一方，Φの全微分を考えると,

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy = \frac{1}{k}(-V_x dx - V_y dy) \tag{8}$$

となるので，

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} = -\frac{V_x}{V_y} \tag{9}$$

となる。

したがって，等ポテンシャル線 $\Phi = \text{const.}$ の接線の勾配 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}}$ と

流線 $\Psi = \text{const.}$ の接線の勾配 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}}$ を掛け合わせると，

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const.}} = -1$$

となり，お互いは直交することがわかる。