

【積分による各種地盤内応力の求め方】

(1)線荷重による地盤内応力

Boussinesq の弾性応力解によって、鉛直な点荷重が地表面に載荷されたときの地盤内の応力分布を計算する。線形弾性理論を用いているので、単純に積分（足しあわせ）をしてやれば良い。

今、地表面(xy 平面, $z=0$)上で、さらに y 軸($x=0$)上を無限に続いている線荷重を考える。この場合、任意の xyz 座標の地盤内応力を考える場合、 y はどの座標値であっても同じとなる。すなわち、地盤内応力は右図のように xz の 3 つの 2 次元成分だけ考えれば良い。

以下に具体的な計算を示す。

点荷重 Q から深さ z , 距離 R の座標点における Boussinesq の鉛直地盤内応力は、

$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5}$$

である。これを線荷重の場合に適用する。すなわち、微小区間 dy に載荷される荷重 dQ は

$$dQ = qdy \quad (\text{kN})$$

であるので、これを点荷重と見なせば、距離 R 離れた地盤内応力は以下ようになる。

$$d\sigma_z = \frac{3dQz^3}{2\pi R^5} = \frac{3(qdy)z^3}{2\pi R^5} = \frac{3qz^3}{2\pi R^5} dy \quad (1)$$

最終的に xz 平面の 2 次元問題となるために、

その面でのパラメータだけにするために、 y および R を r で置き換える

$$\text{すなわち, } y = r \tan \alpha \quad \text{および} \quad R = \frac{r}{\cos \alpha}$$

最終的に線荷重による地盤内応力は、(1)式を $-\infty$ から ∞ まで積分したものであるから、

$$\sigma_z = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} d\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3qz^3}{2\pi R^5} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3qz^3}{\pi} \left(\frac{\cos^5 \alpha}{r^5} \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3qz^3}{\pi} \left(\frac{\cos^5 \alpha}{r^5} \right) \left(\frac{r}{\cos^2 \alpha} \right) d\alpha = \frac{3qz^3}{\pi r^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha d\alpha$$

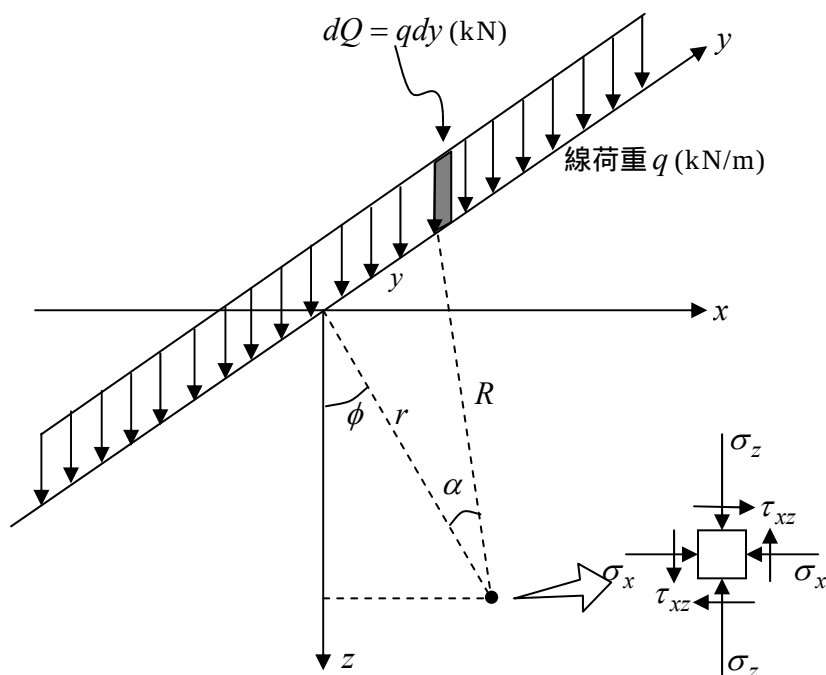
なお、 y から α へ変数変換するのにあたり、 $y = r \tan \alpha$ の両辺を微分した下式を用いている。

$$dy = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad (y \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2})$$

計算の結果、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha d\alpha = \frac{2}{3}$ 、および z と r の関係式 $z = r \cos \phi$ より

$$\sigma_z = \frac{3qz^3}{\pi r^4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2q}{\pi} \cdot z^3 \cdot \left(\frac{\cos \phi}{z} \right)^4 = \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi \quad \therefore \sigma_z = \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi$$

以上とほぼ同様の計算で、 $\sigma_x = \frac{2q}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi$ と $\tau_{xz} = \frac{2q}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi$ も得ることができる。



(2) 帯荷重による地盤内応力

微小区間 dx に線荷重 (紙面奥行き方向に無限につながる荷重) $dQ = qdx$ が載荷されている時、
 載荷位置から水平に x 、深さ z 離れた地中での地盤内応力は、前ページ(1)の結果より、

$$d\sigma_z = \frac{2qdx}{\pi z} \cos^4 \phi$$

$$d\sigma_x = \frac{2qdx}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi$$

$$\tau_{xz} = \frac{2qdx}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi$$

となる。まず鉛直荷重 σ_z を考える。

$$x = z \tan \phi \quad \text{より} \quad dx = \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi \quad \text{を用いて、}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \int_{x=x_1}^{x=x_2} d\sigma_z = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \left[\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} [\phi + \sin \phi \cos \phi]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) + \sin \beta_2 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_1\} \\ &= \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) + \sin(\beta_2 - \beta_1) \cos(\beta_2 + \beta_1)\} \end{aligned}$$

$2\theta = \beta_2 - \beta_1$ および $2\varphi = \beta_2 + \beta_1$ とおけば、最終的に σ_z は次式となる。

$$\therefore \sigma_z = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

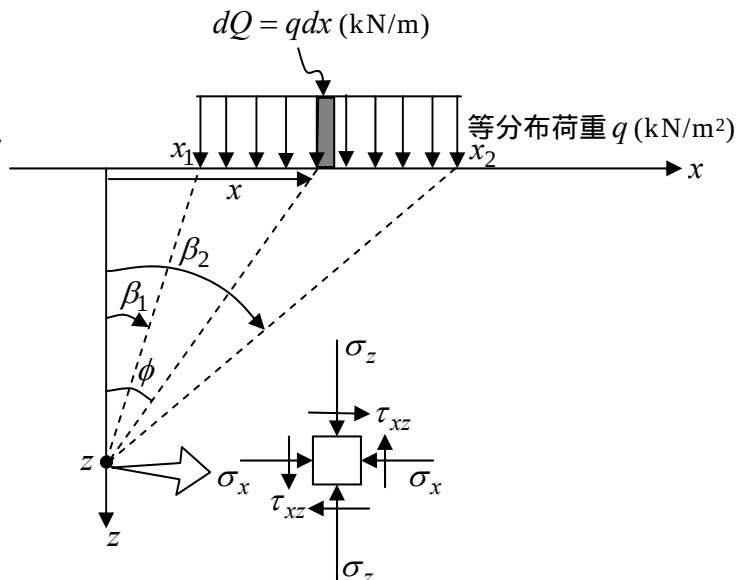
同様の手順で、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \int_{x=x_1}^{x=x_2} d\sigma_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin^2 \phi d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right) d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \left[\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} [\phi - \sin \phi \cos \phi]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) - (\sin \beta_2 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_1)\} \\ &= \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) - \sin(\beta_2 - \beta_1) \cos(\beta_2 + \beta_1)\} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \int_{x=x_1}^{x=x_2} d\tau_{xz} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \phi \cos \phi d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{\sin 2\phi}{2} \right) d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sin^2 \phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} (\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1) = \frac{q}{\pi} \sin(\beta_2 + \beta_1) \sin(\beta_2 - \beta_1) \end{aligned}$$

$$\therefore \tau_{xz} = \frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi$$



(3) 帯荷重による地盤内応力の主応力

$$\sigma_z = \frac{q}{\pi}(2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi), \quad \sigma_x = \frac{q}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi),$$

$$\tau_{xz} = \frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi \text{ より}$$

モールの応力円を描けば右図のようになる。ただし，鉛直応力 σ_z の方が，水平応力 σ_x より大きいことを前提とした。

円の中心の座標は，

$$\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{2\theta}{\pi}$$

であり，円の半径は，

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{q}{\pi} \sin 2\theta$$

であるので，最大および最小主応力は以下ようになる。

$$\sigma_1 = \frac{q}{\pi}(2\theta + \sin 2\theta) \quad \text{および} \quad \sigma_3 = \frac{q}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta)$$

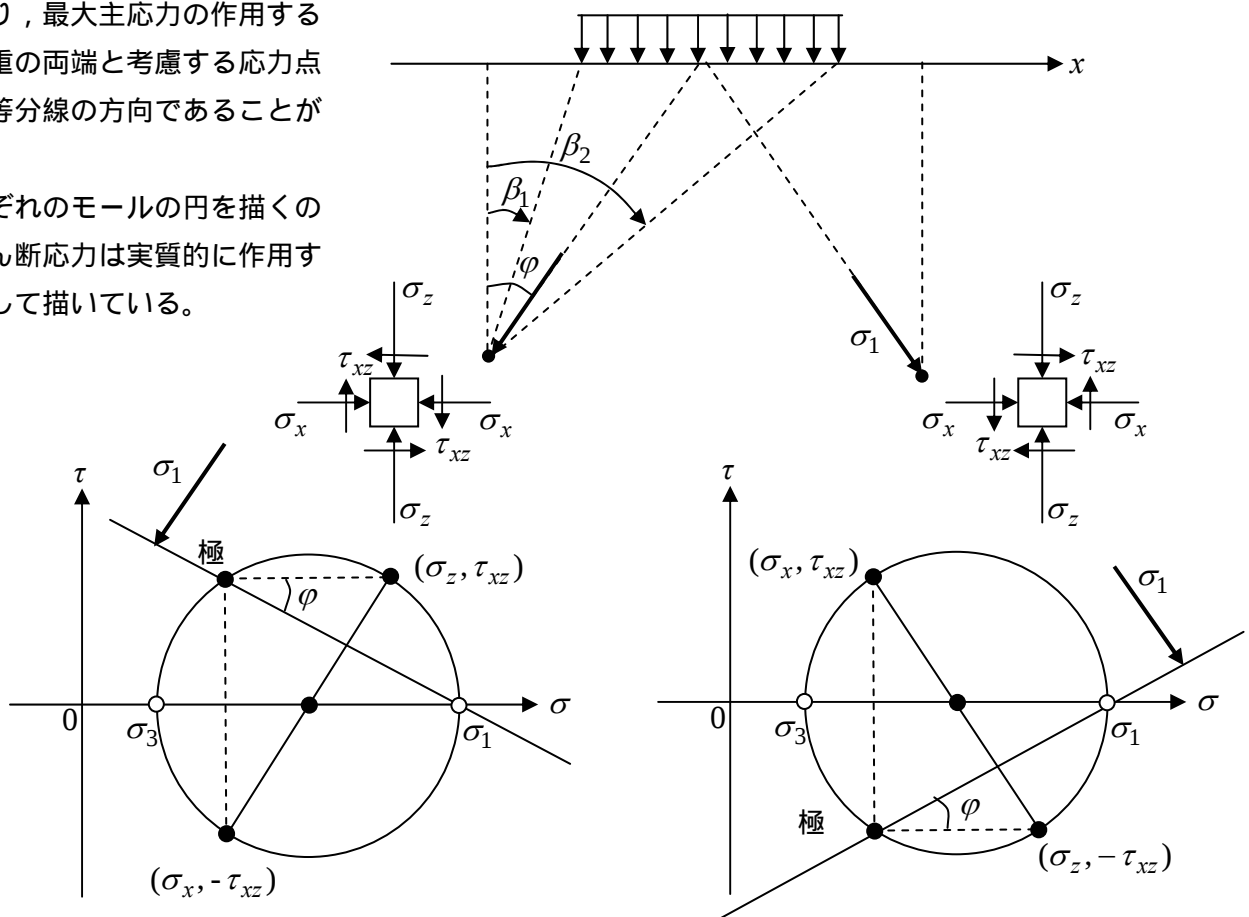
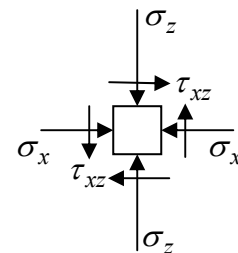
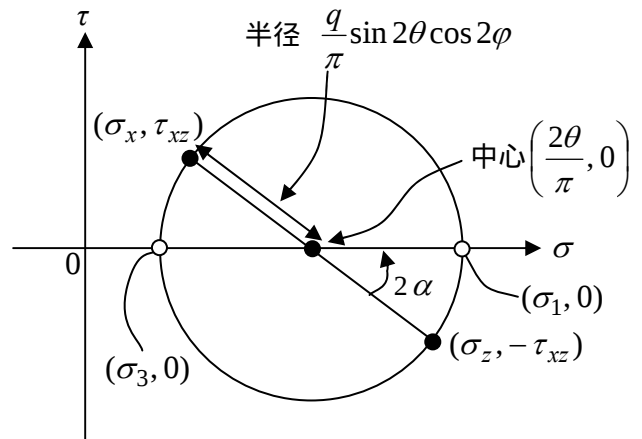
また，最大主応力 σ_1 が作用する面は σ_z が作用する面（すなわち水平面）から反時計回りに α 回転した面であるが，その角度を具体的に計算すると，

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x} = \tan 2\varphi \quad \therefore \alpha = \varphi = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}$$

となる。

右下の図より，最大主応力の作用する方向は，帯荷重の両端と考慮する応力点で作る角の2等分線方向であることがわかる。

なお，それぞれのモールの円を描くのにあたり，せん断応力は実質的に作用する方向を規定して描いている。



(4) 三角形帯荷重による地盤内応力

x 軸の方向に右図のような三角形分布の帯荷重を考える（紙面奥行き方向に無限につながっている）
座標 x の位置に作用する分布荷重を

$$q(x) = q\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

とすれば，微小区間 dx での線荷重は

$$dQ = q\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx$$

となり，水平距離 x，深さ z の位置の鉛直地盤内応力は，

$$d\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos^4 \phi dx$$

となる。

$x = z \tan \phi$ より， $dx = \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi$ となる。ただし， $0 \leq x \leq a \rightarrow 0 \leq \phi \leq \beta (= \tan^{-1}(\frac{a}{z}))$ であることに注意する。

結局，

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \int_{x=0}^{x=a} d\sigma_z = \int_0^a \frac{2q}{\pi z} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos^4 \phi dx = \int_0^\beta \frac{2q}{\pi z} \left(1 - \frac{z \tan \phi}{a}\right) \cos^4 \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \int_0^\beta \frac{2q}{\pi} \left(1 - \frac{z}{a} \tan \phi\right) \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{2q}{\pi} \int_0^\beta \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi - \frac{2q}{\pi} \int_0^\beta \sin \phi \cos \phi d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \beta = \frac{q}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{z}\right) \end{aligned}$$

