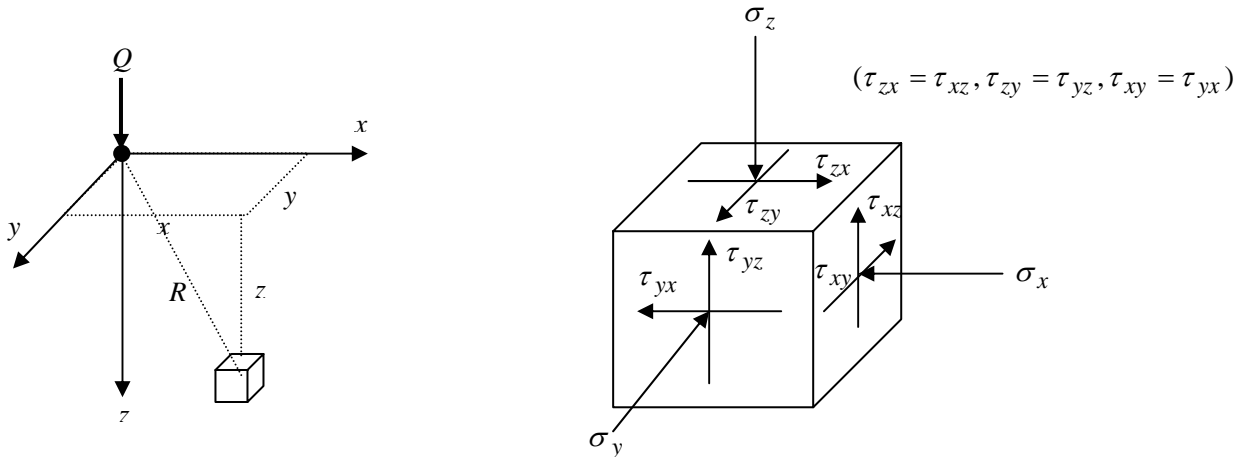


【地盤内応力 ( Boussinesq の弾性解 )】

半無限弾性地盤の Boussinesq の解は 3次元場で表されるが、適用する問題に応じて座標系を変えることにより、より使いやすくなる場合が多い。ここでは、基本となる直交座標系と、それから求められる円筒座標系、極座標系での解を示す。

(1)直交座標系



各応力の成分は、

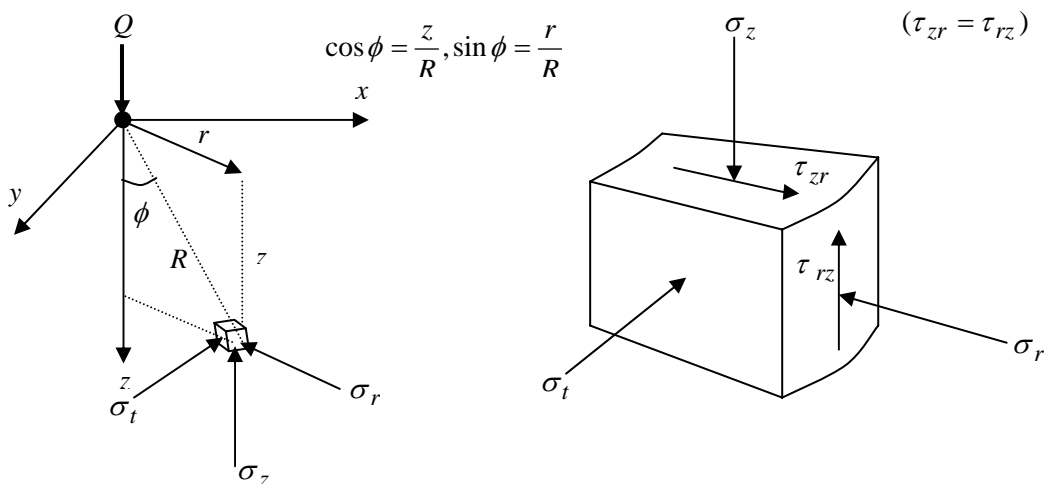
$$\sigma_x = \frac{3Q}{2\pi} \left[ \frac{zx^2}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left( \frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{R^3(R+z)^2} \right) \right], \quad \sigma_y = \frac{3Q}{2\pi} \left[ \frac{zy^2}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left( \frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{R^3(R+z)^2} \right) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5}, \quad \tau_{xy} = \frac{3Q}{2\pi} \left[ \frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\nu}{3} \frac{xy(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right], \quad \tau_{zx} = \frac{3Qz^2x}{2\pi R^5}, \quad \tau_{zy} = \frac{3Qz^2y}{2\pi R^5}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

変位の成分は、

$$u_x = \frac{Qx}{4\pi G} \left[ \frac{z}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z)} \right], \quad u_y = \frac{Qy}{4\pi G} \left[ \frac{z}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z)} \right], \quad u_z = \frac{Q}{4\pi G} \left[ \frac{z^2}{R^3} - \frac{2(1-\nu)}{R} \right]$$

(2)円筒座標系



各応力の成分は、

$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5} = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^5 \phi, \quad \sigma_r = \frac{Qz^3}{2\pi R^2} \left[ \frac{3r^2 z}{R^3} - (1-2\nu) \frac{R}{R+z} \right] = \frac{Q}{2\pi R^2} \left[ 3\cos^3 \phi \sin^2 \phi - (1-2\nu) \frac{\cos^2 \phi}{1+\cos \phi} \right],$$

$$\sigma_t = -(1-2\nu) \frac{Q}{2\pi R^2} \left( \frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) = -(1-2\nu) \frac{Q}{2\pi z^2} \left( \cos^3 \phi - \frac{\cos^2 \phi}{1+\cos \phi} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{3Qrz^2}{2\pi R^5} = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^4 \phi \sin \phi$$

### (3) 直交座標系と円筒座標系の応力の成分の関係

鉛直方向の垂直応力  $\sigma_z$  は直交座標系でも、円筒座標系でも共通で同じものである。

円筒座標系での半径方向の垂直応力  $\sigma_r$  は、直交座標系での「 $x$  軸上で  $x=r$  の時の  $\sigma_x$ 」あるいは、「 $y$  軸上で  $y=r$  の時の  $\sigma_y$ 」に相当する。式示すと、

$$\sigma_r = (\sigma_x)_{x=r} = (\sigma_y)_{y=r} \quad \text{実際に計算してみると、成り立つことは明らか。}$$

また、円筒座標系での円周方向の垂直応力  $\sigma_t$  は、直交座標系での「 $x$  軸上で  $\sigma_y$ 」あるいは、「 $y$  軸上での  $\sigma_x$ 」に相当する。式示すと、

$$\sigma_t = (\sigma_x)_{x=0} = (\sigma_y)_{y=0} \quad \text{これも成り立つことは明らかである。}$$

同様に、円筒座標系でのせん断応力  $\tau_{rz} (= \tau_{zr})$  は、直交座標系での「 $x$  軸上で  $\tau_{zx}$ 」あるいは、「 $y$  軸上での  $\tau_{zy}$ 」に相当する。式示すと、

$$\tau_{rz} = (\tau_{zx})_{y=0} = (\tau_{yz})_{x=0} \quad \text{これも成り立つ。}$$

最後に、円筒座標系の図には示されていないが、 $\tau_{rz} (= \tau_{zr})$  以外のせん断応力はどうなっているのだろうか。

円筒座標系でのせん断応力  $\tau_{tz} (= \tau_{zt})$  は、直交座標系での「 $x$  軸上で  $\tau_{zy}$  あるいは  $\tau_{yz}$ 」に相当する。また、円筒座標系でのせん断応力  $\tau_{tr} (= \tau_{rt})$  は、直交座標系での「 $x$  軸上で  $\tau_{xy}$  あるいは  $\tau_{yx}$ 」に相当する。それぞれについて式示すと、

$$\tau_{tz} = (\tau_{zy})_{y=0} = (\tau_{yz})_{y=0} = 0, \quad \tau_{tr} = (\tau_{xy})_{y=0} = (\tau_{yx})_{y=0} = 0$$

いずれも簡単な計算でゼロになることがわかる。

円筒座標系では、円周方向に対称（軸対称と呼ぶ）であるため、円周方向に働くせん断応力は存在しない。したがって、 $\tau_{rt}$  や  $\tau_{zt}$  は存在しないので、それと共役な  $\tau_{tr}$  や  $\tau_{tz}$  も存在しない。

### (4) 鉛直垂直応力 $\sigma_z$

地盤の沈下予測等に用いることを考えると、地盤内応力の中でも鉛直応力が最も重要となる。

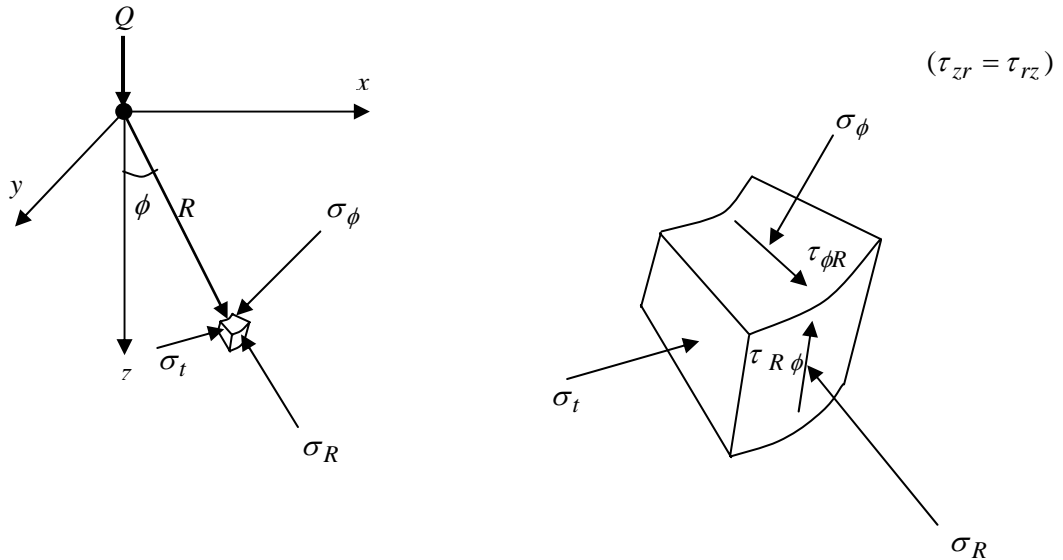
$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5} = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^5 \phi \quad \text{を見てもわかるように、この応力に限っては、中に弾性係数（ $G$  や  $\nu$ ）が含まれて}$$

いない。これは、鉛直垂直応力に関しては、弾性係数すなわち地盤の硬さとは無関係であることを意味しており、軟らかい粘土地盤であっても、硬い砂地盤であっても、鉛直応力は同じ値となり、鉛直応力の合力は鉛直荷重  $Q$  につり合う。軟らかすぎの粘土地盤などは、弾性体と仮定できないこともあるが、鉛直の力のつり合いを満たすように鉛直応力が決まるとすれば、多少非弾性であっても、結果に大きな違いはない。

弾性論による地盤内応力の弾性解は、極端に理想化された条件で求められた解であるが、最も注目すべき鉛直応力が地盤を構成する材料の性質に無関係に決まることは、弾性解の利用上、非常に重要である。もし、地盤を

構成する材料によって、この弾性解が変わっていたとすれば、それを利用するためにはまず弾性定数を決めなければならなくなり、必ず地盤調査が必要になる上、応力解の予測精度が弾性係数の予測精度ともなり、ここまで実務で用いられることは無かったと考えられる。

(5) 極座標系



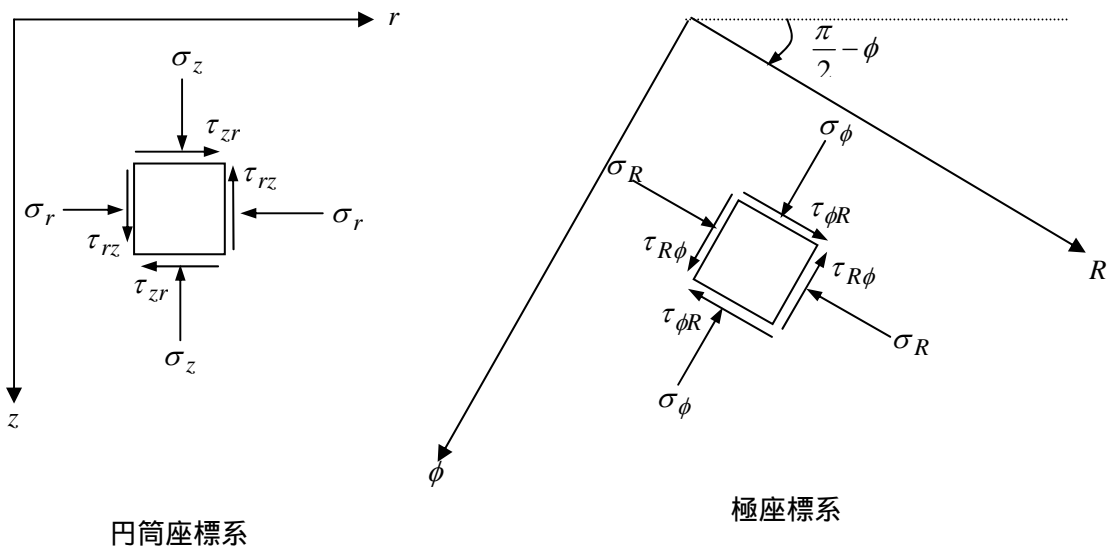
各応力の成分は、

$$\sigma_R = \frac{Q}{2\pi R^2} [2(2-\nu)\cos\phi - (1-2\nu)] , \quad \sigma_\phi = -(1-2\nu)\frac{Q}{2\pi R^2} \frac{\cos^2\phi}{1+\cos\phi} , \quad \sigma_t = -(1-2\nu)\frac{Q}{2\pi R^2} \left( \cos\phi - \frac{1}{1+\cos\phi} \right) ,$$

$$\tau_{R\phi} = -(1-2\nu)\frac{Q}{2\pi R^2} \frac{\cos\phi\sin\phi}{1+\cos\phi}$$

(6) 極座標系と円筒座標系の応力の成分の関係

いずれの座標系でも、z 軸を中心として円周方向に対称となっているので、 $\sigma_t$  は共通であり、また円筒座標系と同様に、 $\sigma_t$  が作用する面にはせん断応力は作用しない。あとは、それ以外の 2 方向の面であるが、それらの面だけの 2 次元で表すと、両座標系の間には下図のような関係がある。



円筒座標系

極座標系

したがって、下記のような以前学んだ座標変換（配布資料 No.13 参照）を当てはめる。

元の座標系 座標変換後の座標系

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \quad \sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta,$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

円筒座標系を元の座標系と考え、上の関係式で  $\sigma_x = \sigma_z, \sigma_y = \sigma_r, \tau_{xy} = \tau_{zr}$  として、 $\theta = -(\frac{\pi}{2} - \phi)$  で座標変換すれば、極座標は変換後の座標系に相当し、 $\sigma'_x = \sigma_\phi, \sigma'_y = \sigma_R, \tau'_{xy} = \tau_{R\phi}$  と考える。結局、円筒座標系での応力の成分と極座標での応力の成分の関係式は以下ようになる。

$$\sigma_\phi = \frac{\sigma_z + \sigma_r}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \cos 2\phi - \tau_{zr} \sin 2\phi, \quad \sigma_R = \frac{\sigma_z + \sigma_r}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \cos 2\phi + \tau_{zr} \sin 2\phi,$$

$$\tau_{R\phi} = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \sin 2\phi - \tau_{zr} \cos 2\phi$$

(7)おわりに

以上のように、3つの座標系を用いて、Boussinesqの弾性解を示したが、これらは皆点荷重荷重に対する半無限地盤内での応力分布を求めるものであった。実際の構造物から加わる荷重形状は、面的な広がりを持つものであるので、点荷重荷重で得られた弾性解を適宜積分して、2次元あるいは3次元荷重として扱えるようにする。その際、地盤内でどの方向を応力の成分を知りたいかによって、3つの座標系で得られた応力を使い分ける。