

【モールの応力円】

(1)モールの応力円を使う上での3つの約束

垂直応力は圧縮を正とし, σ 軸の右側を正の方向とする。

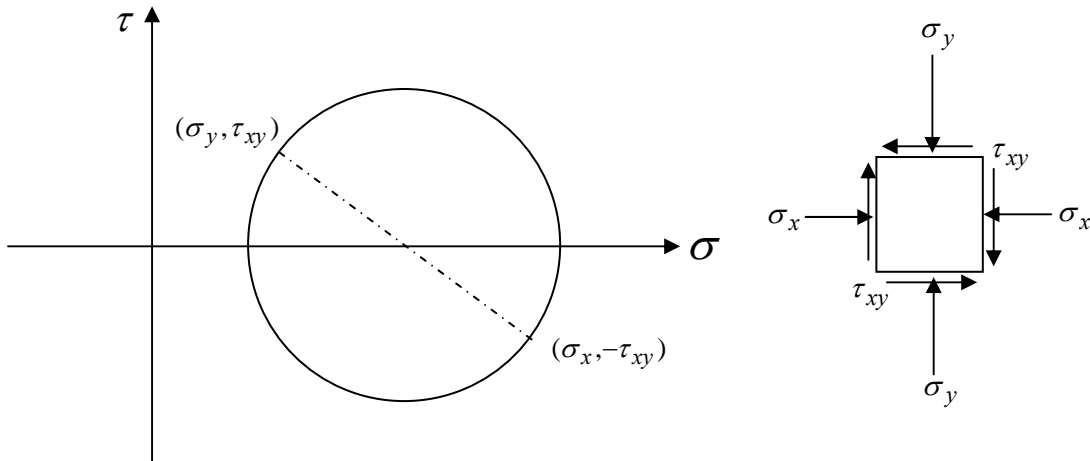
反時計まわりのモーメントを起こさせるせん断応力 τ の組を正とする。

物体内で着目する面が, θ だけ回転すると, モールの応力円上では 2θ 回転する。

と は物理的な実際の作用面とモールの応力円上との回転の方向を一致させるために都合の良い約束である。 は場合によっては, 座標変換の時に決めたせん断応力の符号とは必ずしも一致しない (むしろ逆の場合も多い) ので注意する。

はモールの応力円の誘導した過程 (座標変換の式も同様) で, 三角関数の倍角公式により, 物理的な実際の作用面での角度 θ が, 計算上は 2θ になってしまったことからわかる。

これを利用して用極法ができています。

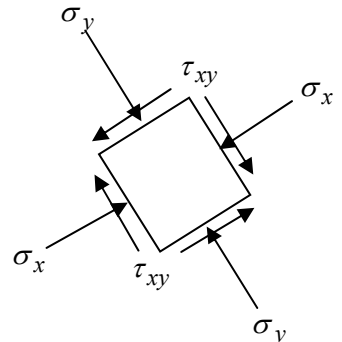


例えば, 上図は右側の応力状態 ($\sigma_x > \sigma_y$ の場合) をモールの応力円で描いたものである。座標変換の場合に約束したせん断応力の符号の決め方では, 図の x 面 (x 軸に垂直な面) に作用するせん断応力は下向きが正 (図に記した方向) であるが, モールの応力円の約束ではその方向は時計回りにモーメントを発生させる向きなので負となる。したがって, モールの応力円上では, σ_x に対するせん断応力は $-\tau_{xy}$ となっている。

また, モールの応力円は, ただ一組の直交する2つの面の応力状態がわかれば, そこから 180 度回転したあらゆる面に作用する応力状態がわかる。要は, 座標変換のすぐれた図式解法である。

(2)用極法

上図のモールの応力円を描いている時点では, 物理的な作用面の方向は全く関係ない。すなわち, 右のような応力状態であっても, 描かれるモールの応力円は全く変わらない。しかし, モールの応力円の図上に補助線を引いて, 極(Pole)を決めるだけで, モールの応力円の図上で, 物理的な作用面の方向の議論ができるようになる。



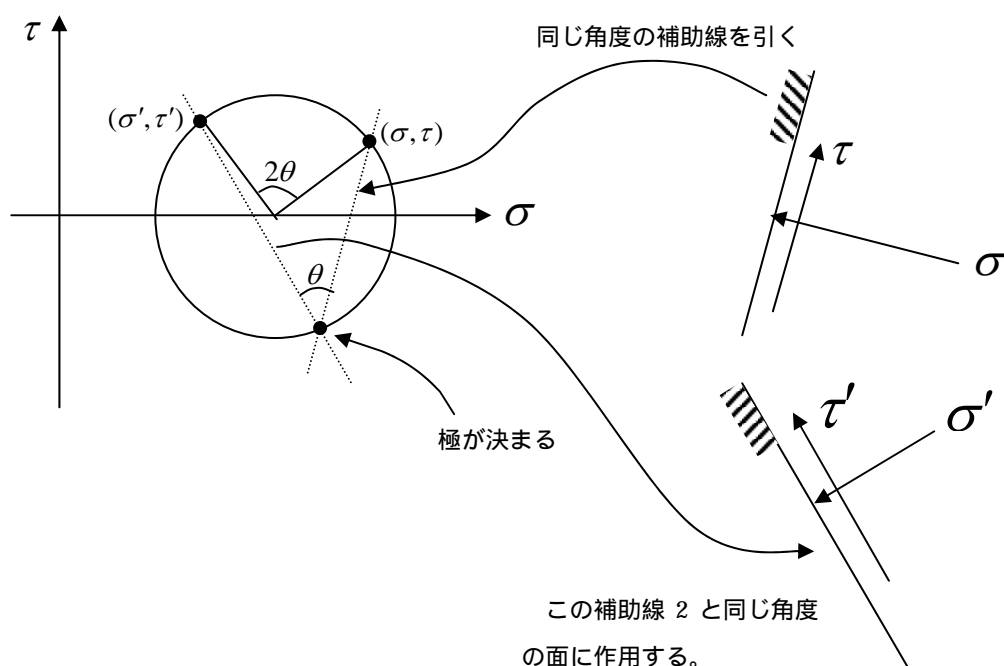
極の決め方

ある応力の組 (σ, τ) に対して、その応力が作用している面の方向に合わせてモールの応力円の図上に補助線を引く。

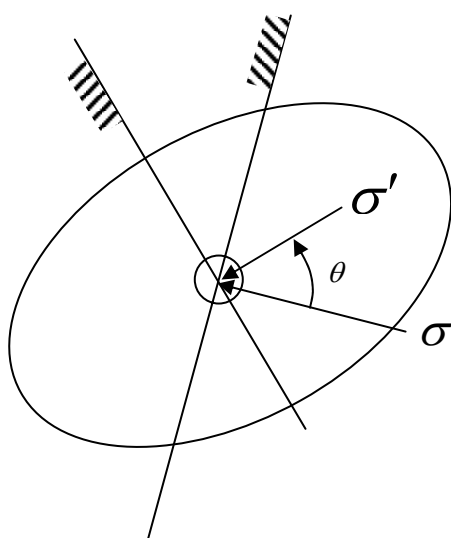
その補助線とモールの応力円上の交点を極とする。なお、補助線とモールの応力円が交差している場合（普通の場合）は、元の応力点と別の点が極となる。また、補助線とモールの応力円が接している場合は、その接点自身が極となる。

極の使い方

モールの応力円上のある応力点 (σ', τ') が作用している面の方向は、極からその応力点に引いた補助線 2 の方向である。

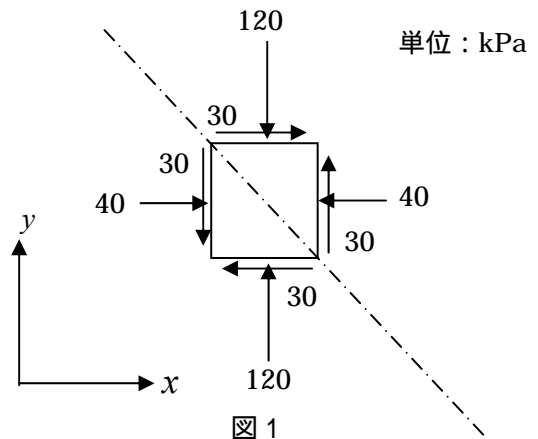


上の右の図のように描くと、 (σ, τ) と (σ', τ') の 2 組の応力が作用している 2 つの面の関係がわかりづらいが、実は物体内の同じ位置において、応力が作用する面を回転させているだけであることに注意する。



(3) 応力の座標変換とモールの応力円の例題

【 1 】 座標変換を用いて答えよ。
 図 1 のように、45 度傾いた面に作用する
 垂直応力とせん断応力を求めよ。
 (せん断応力は、向きを図示して示しなさい)
 最大主応力と最小主応力の大きさを
 応力テンソルの固有値を用いて求めよ。



ポイント：座標変換の式を用いるときは、各応力の成分の符号を整理する。

【 の解答と解説】

図 2 の xy 座標系を設定した場合、各応力の成分は、

$$\sigma_x = 40, \quad \sigma_y = 120, \quad \tau_{xy} = -30 \text{ となる。}$$

45 度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力とは、同じく図 2 のように、 σ_x から反時計まわりに 45 度回転した

$\sigma_{x'}$ と $\tau_{x'y'}$ である。(よって、 $\theta = +45^\circ$)

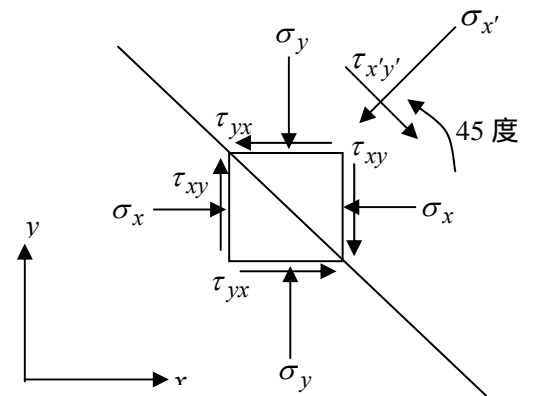


図 2

したがって、(この座標系で考えた場合の) 座標変換の式

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

にそれぞれの値を代入して、

$$\sigma_{x'} = \frac{40 + 120}{2} + \frac{40 - 120}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + (-30) \sin(2 \times 45^\circ) = 50$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{40 - 120}{2} \sin(2 \times 45^\circ) + (-30) \cos(2 \times 45^\circ) = 40$$

以上のように求められたので、垂直応力とせん断応力(特にせん断応力)の向きに注意して、図 3 のように答える。

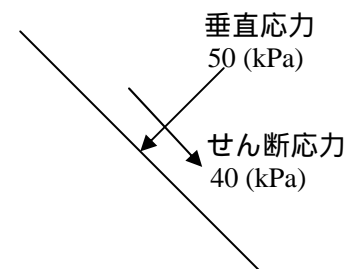


図 3

(図 1 を見れば、横より上下に作用する応力の方が大きいので、45 度傾いた面に作用するせん断応力の向きが斜め下向きになることは直感的に考えてもわかるはず)

【 の解答と解説】

応力テンソルは、図 2 のような座標系を設定すれば、整理したのと同様に各成分が次式のように求められる。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -30 \\ -30 & 120 \end{pmatrix}$$

主応力：応力(ベクトル)が作用する面をいろいろ回転して見たときに、せん断応力が全く作用せず、垂直応力のみが作用する面が必ずあり、その時の垂直応力のことを主応力と言う

したがって、主応力を求めるには、応力テンソルを対角化すればよい。具体的には、固有値と固有ベクトルを求めるということだが、主応力の値だけなら、固有値を求めれば良い。よって、

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 - \lambda & -30 \\ -30 & 120 - \lambda \end{vmatrix} = (40 - \lambda)(120 - \lambda) - (-30)^2$$

$$= \lambda^2 - 160\lambda + 3900 = (\lambda - 30)(\lambda - 130) = 0 \quad \text{より,} \quad \lambda = 30, 130$$

したがって、最大主応力は 130(kPa)、最小主応力は 30(kPa)となる。

主応力と応力テンソルの固有値については、[配付資料 No.13 の\(8\)を参照](#)

【2】モールの応力円を用いて答えよ。

(用極法を用いずに解きなさい)

図1のように、45度傾いた面に作用する

垂直応力とせん断応力を求めよ。

(せん断応力は、向きを図示して示しなさい)

最大主応力の大きさと作用する面の方向を求めよ(方向は図示せよ)

【 の解答と解説】

始めに、図1の2組の応力の組み合わせが、モールの応力円を描く上で、どの点にプロットされるのかを、特にせん断応力の符号に注意して考える。

すなわち、垂直応力が40(kPa)作用する面のせん断応力は、図の四角形の土要素を反時計回りに回そうとする方向であるので、正となり、30(kPa)となる。したがって、図4において、垂直応力が40(kPa)作用する鉛直面における応力状態は点Aで表される。一方、それと直交する水平面には、垂直応力120(kPa)と土要素を時計回りに回転させようとするせん断応力(すなわち、図4では負)が作用するので、図1での水平面の応力状態は図4で点Bで表される。

結局、モールの応力円は、点A、点Bを結ぶ線を直径とする円となる。さて、問題の図1に示す45度傾いた面に作用する応力状態であるが、これは図2から、点Aの応力状態が45度、反時計回りに回転した場合の応力状態である。図2での物理的座標軸の回転の方向は、図4のモールの応力円の図上の回転の方向と一致するから、図4のモールの応力円では、45度の2倍の90度だけ点Aから回転した点Cの応力状態が、求めるべきものとなる。したがって、三角形の幾何学的な関係から、点Cの座標は(50, -40)となる。せん断応力は負であるので、モールの応力円の作図の約束より、土要素を時計回りに回す方向に作用することがわかる。すなわち、図示すると、図5のようになる。

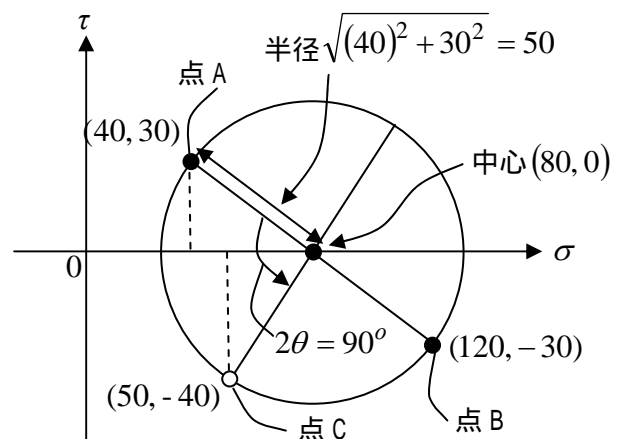


図4

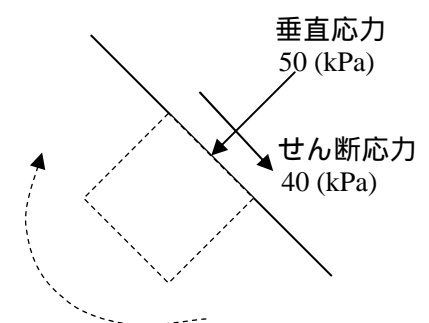


図5

【 の解答と解説】

主応力は、座標軸を回転させて応力状態を観測した時に、せん断応力がゼロとなる場合の垂直応力であるから、モールの応力円の図6上では、2つの点となる。円の半径が50であることから、最大主応力と最小主応力は、それぞれ中心の座標(80,0)から半径を足したものと引いたものとなり、

最大主応力 130(kPa)

最小主応力 30(kPa)

となる。

では、主応力が作用する面の方向であるが、

点Aの応力状態が作用する面、すなわち鉛直面を基準

に考えると、図5において、点Aから最小主応力の点まで、中心角にして反時計回りに

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right)$$

となるので、実際には

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = 18.4^\circ$$

鉛直面から反時計回りに傾いた面に最小主応力は作用することになる。

一方、最大主応力の点は、点Bから中心角にして反時計回りに α だけ回転した場所で表されるので、点Bの応力状態が作用する面、すなわち水平面から反時計回りに、

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = 18.4^\circ$$

だけ傾いた面に作用することになる。図示すると、図7のようになる。

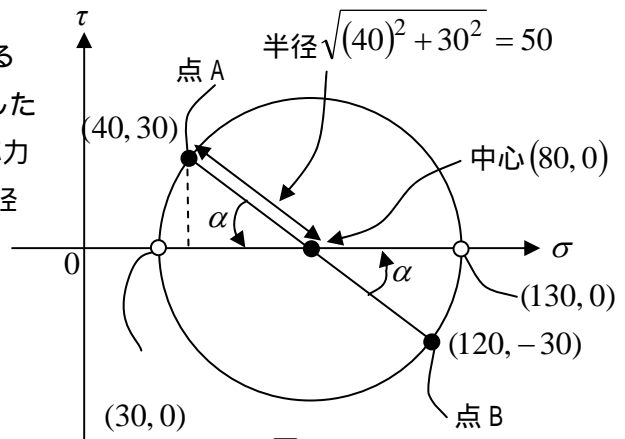


図6

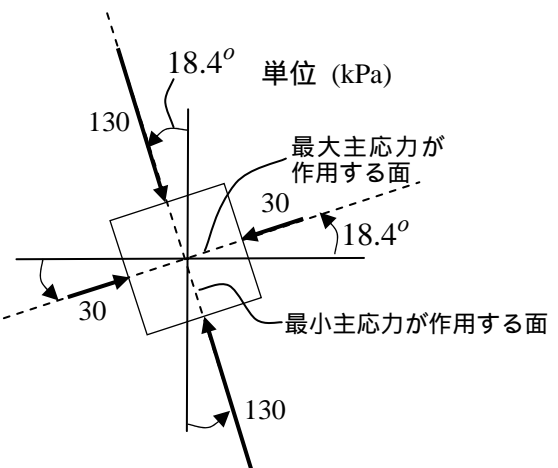


図7

注意：

図1と図7の関係はどちらの応力状態であっても、観測している座標軸が異なるために、表し方が異なるだけである。そのため、土要素がうける変形は全く同じになる。すなわち、図8のようにもともと円型の土要素に、図1のような応力状態が作用した場合と、図7のように主応力が作用した場合は、土要素の円は、斜線部の楕円のように全く同じ変形となる。(ただし、これはイメージ図) 逆に、図8の左の図を見ただけで、大体的変形のイメージ(斜線の楕円の形)が思い浮かべられれば、主応力の作用する方向を間違えることはまず無い。

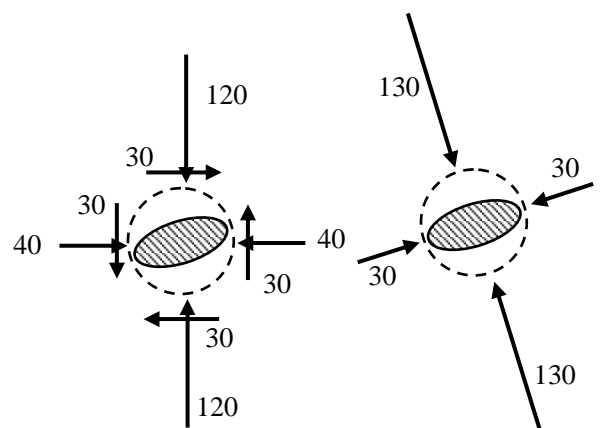


図8

【3】モールの応力円の用極法を用いて答えよ。

図のように、45度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力を求めよ。

(せん断応力は、向きを図示して示さない)

最大主応力の作用する面の方向を求めよ

(方向は図示せよ)

【 の解答と解説】

モールの応力円を描くまでは(2)と同じ。

極の求め方は、すでに明らかになっている応力状態を

基準にして、それらが作用している面を実際にモールの

応力円の図上に描いてしまう。ここでは、点Aと点B

の応力状態が明らかである。点Aの応力状態が作用する

面は鉛直面であるので、図9に示すように、それを図上に

描き、その面と応力円との交点を「極」と定める。(これは、点Bから、その作用面(水平面)を描いても同じ「極」を定めることができる。要するに、「極」とは、モールの応力円上ですべての作用面が交わる唯一の点である。)

極が定めれば、問題の「45度傾いた面」を実際に、極を通るように図上に描けば、その面とモールの応力が交わる極以外のもう一つの点

が、その面に作用する応力状態を表す点となる。

したがって、C点がその求める点となる。

実は、点Cの具体的な座標値を図9から求めるのは若干面倒くさいが、幾何学的な関係だけから、

$(\sigma, \tau) = (50, -40)$ と求めることができる。したがって、答えは図5と全く同様となる。

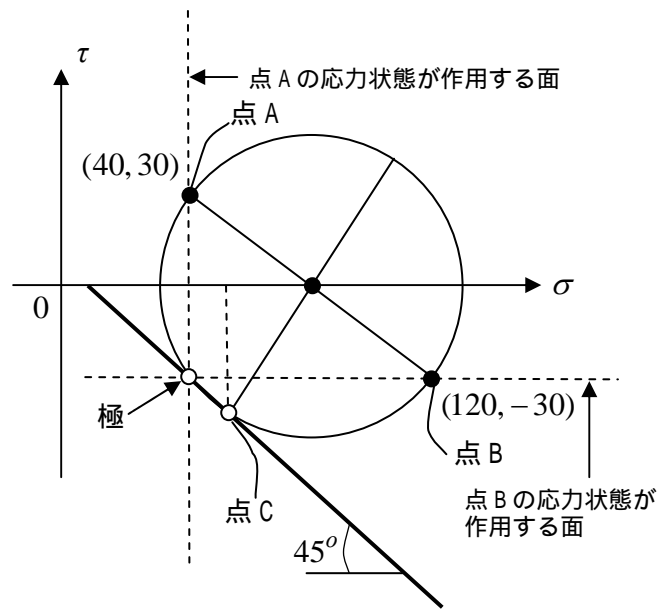


図9

【 の解答と解説】

すでに極が求められているので、最大主応力の作用する面を示すのは、非常に簡単であり、

図10に示すように、極から最大主応力

を示す点を結んだ線が最大主応力が作用する面

となる。また、最小主応力が作用する面も同様に、

極から最小主応力

を示す点に線を引くだけである。

具体的な角度は、幾何学的な関係より、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{90}\right) = 18.4^\circ$$

となり、最大主応力が作用する面は、水平面

から18.4度反時計回りに傾いた面であることがわかる。一方、最小主応力が作用する面は鉛直面から反

時計回りに18.4度だけ傾いた面であることがわかる。(図7も参照のこと)

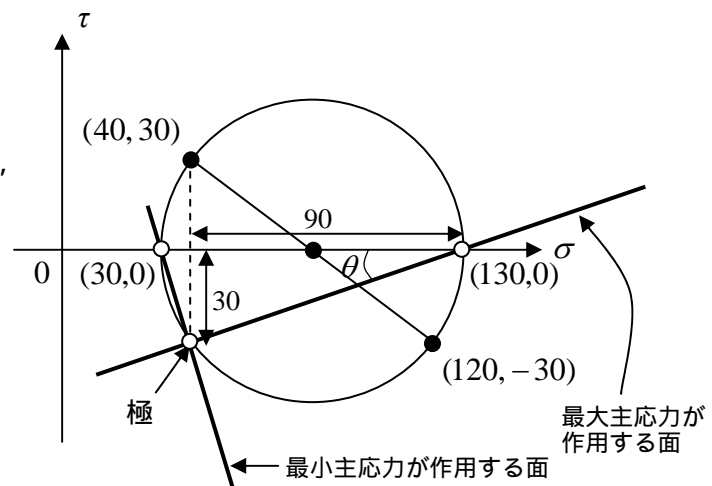


図10

まとめ：当然のことながら、どの解法でも同じ結果を得ることが出来るが、それぞれに特長がある。例えば、用極法は非常に優れた図式解法であり、応力の作用面の方向が一目瞭然でわかるが、モールの応力円上の具体的な座標値や、傾きの角度を計算するのは若干面倒くさいこともある。数字をズバリ出すなら、座標変換の式を用いた方が正確で早いことも多い。これらの特長を抑えて、自在に使い分けることができれば理想的である。

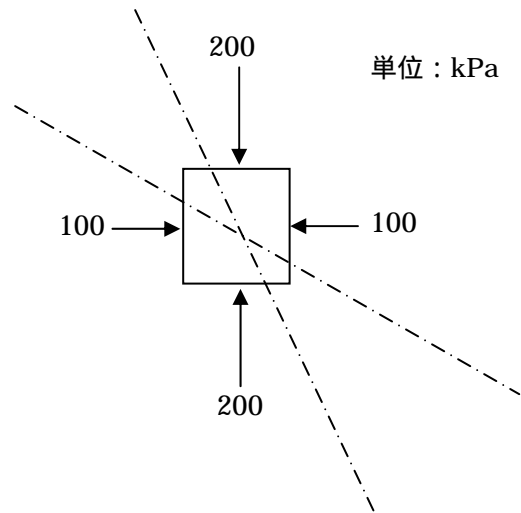
【4】

右の図の応力状態があったとする。
 図のように30度と60度傾いた面に働く、
 垂直応力とせん断応力の大きさと向きを
 下記の方法で求めよ。

座標変換を用いる

モールの応力円（用極法なし）を用いる

モールの応力円（用極法）を用いる



【解答と解説】

ポイント：主応力が与えられている時の問題

座標変換

求める面は、最小主応力が作用する鉛直面からそれぞれ30度と60度傾いているので、

30度の面：

$$\sigma = \frac{100 + 200}{2} + \frac{100 - 200}{2} \cos 60^\circ = 150 - 25 = 125$$

$$\tau = -\frac{100 - 200}{2} \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}$$

60度の面：

$$\sigma = \frac{100 + 200}{2} + \frac{100 - 200}{2} \cos 120^\circ = 150 + 25 = 175$$

$$\tau = -\frac{100 - 200}{2} \sin 120^\circ = 25\sqrt{3}$$

となり、せん断応力の向きは、座標軸の定義より
 それぞれ図11のようになる。

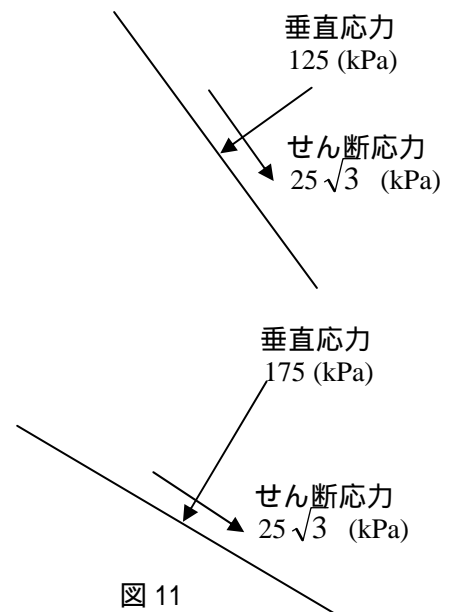


図11

モールの応力円（用極法なし）

モールの応力円は、図12のようになる

求める面は、最小主応力が作用する
 鉛直面からそれぞれ30度と60度反
 時計回りに傾いているので、モール
 の応力円上では最小主応力を示す点
 から、60度と120度同じく反時計回
 りに回転した点が、それぞれの面に
 作用する応力状態を示すことになる。

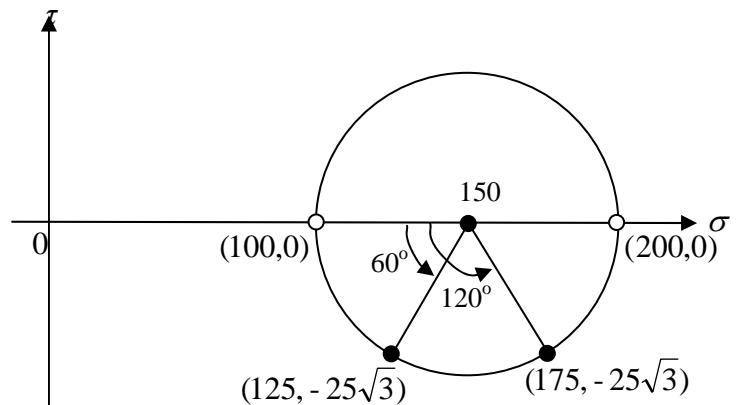


図12

結局，図 12 の幾何学的な関係から，

30 度の面： $(\sigma, \tau) = (125, -25\sqrt{3})$

60 度の面： $(\sigma, \tau) = (175, -25\sqrt{3})$

となり，モールの応力円上の座標でせん断応力が負になる場合は，時計回りに土要素を回転させるようなせん断応力の向きとなるので，結果は，前ページ図 11 と同様になる。

モールの応力円（用極法）

主応力が与えられている場合のモールの応力円において極を定める。

図 13 に示すように，最小主応力を示す点から，最小主応力が作用する面（ここでは鉛直面）を描くと，それは応力円の接線となってしまう。したがって，極は最小主応力を示す点そのものである。最大主応力を示す点から，その作用面（ここでは水平面）を描けば，やはり極は最小主応力を示す点であることが示される。

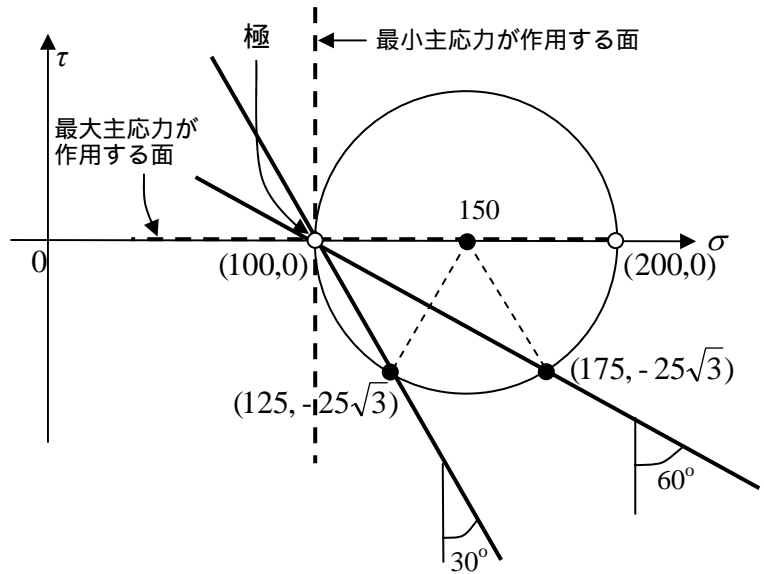


図 13

この極を通り，鉛直面からそれぞれ 30 度と 60 度反時計回りに傾いた面を描き，それらとモールの応力円との交点が，それぞれの面に作用する応力状態を示すことになる。

したがって，図 13 の幾何学的な関係を用いて，

30 度の面： $(\sigma, \tau) = (125, -25\sqrt{3})$

60 度の面： $(\sigma, \tau) = (175, -25\sqrt{3})$

であることがわかる。結果として， と同様に前ページ図 11 と同様の結果を得る。