土質力学Ⅰ及び演習（B班：小高担当）　配付資料 No.9　(2004.5.31)

【圧密方程式の解の性質】

問題②（粘土層厚 H の片面排水条件）を例にとり，圧密方程式で得られた解の性質について説明する。

問題②（粘土層厚 H の片面排水条件）に対する圧密方程式の解は，以下のようになる。

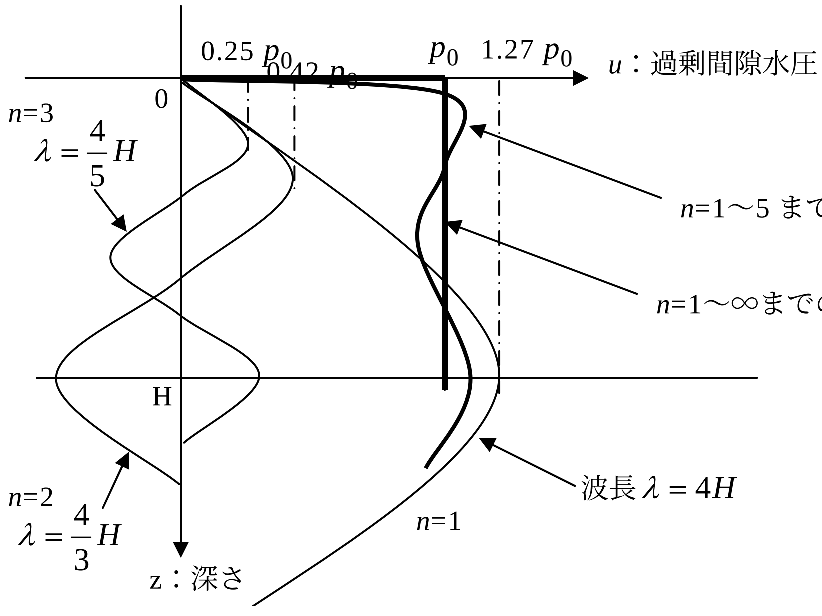
$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t\right),\qquad B_n=\frac{4p_0}{(2n-1)\pi}$$

(1) 初期過剰間隙水圧分布の表現

$$u(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi z}{2H}$$

$$\begin{cases} n=1 & B_1\sin\dfrac{\pi}{2H}z & \rightarrow & \dfrac{4p_0}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2H}z \\ n=2 & B_1\sin\dfrac{3\pi}{2H}z & \rightarrow & \dfrac{4p_0}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi}{2H}z \\ n=3 & B_1\sin\dfrac{5\pi}{2H}z & \rightarrow & \dfrac{4p_0}{5\pi}\sin\dfrac{5\pi}{2H}z \\ & \vdots & & \vdots \end{cases}$$

色々な波長の波があり，それぞれの振幅を調整して，合成した波が初期条件を満たすようにしている。
初期条件の定数は簡単そうであるが，sin 波を合成して作るには，波長が非常に短い波まで必要とする。
また，初期条件が定数でなくても，表現可能である。



振幅のみに注目して，n=5 までを重ね合わせると，

$$\frac{4p_0}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)=1.06\,p_0$$

n 毎に波長，振幅の異なる波の重ね合わせによって，圧密方程式の解が表現されることがわかる。

(2)各モードの減衰

(1)で各モード(n 毎)の初期状態における sin 波の解のイメージがつかめたところで，今度は時間の経過につれて，それぞれのモードの解がどのように変化するのか考える。

各モード $\exp(-\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)$ で時間変化（減衰）は支配されている。

$\exp(\lambda_n\dfrac{\pi^2}{4}T_v)$ （圧密）固有値：$\lambda_n=-(2n-1)^2$， 時間係数：$T_v=\dfrac{c_v\cdot t}{H^2}$

$$\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=-9\\ \lambda_3=-25\\ \lambda_4=-64\\ \quad\vdots\end{cases}\Big\downarrow$$

モード n が大きくなるにつれて，減衰が加速する

したがって，少し時間が経過すれば,

圧密現象は n=1 のモードによる解

$\dfrac{4p_0}{\pi}\sin\dfrac{\pi z}{2H}\,\exp(-\dfrac{\pi^2}{4}T_v)$ にほとんど支配されるようになる。

（その他のモードは無視できるほど小さくなる）

●逆に，圧密開始直後ほど，初期条件を満たすように高次（n が大きい）のモードの解までが影響するために，複雑な解の構成となっており，圧密は複雑な振る舞いをして安定しづらい。

→（すぐ後に勉強する）圧密試験の整理法の $\sqrt{t}$ 法の欠点となっている。

●圧密の速さは $\exp(\lambda_n\dfrac{\pi^2}{4}T_v)$,すなわち時間係数 T_v によって決まる。

時間係数 $T_v=\dfrac{c_v\cdot t}{H^2}$ は層厚 H という境界条件を含んでいるが，粘土の性質だけで考えるならば,

H が同じ場合，圧密係数 c_v が大きな粘土ほど圧密が速い。さらに $c_v=\dfrac{k}{m_v\cdot\gamma_w}$ であるから,

透水係数 k が大きく，体積圧縮係数 m_v が小さい粘土（硬い粘土）ほど圧密が速い。

なお，それ以外の要因（例えば p_0 の大きさ等）は圧密の速さに無関係であることに注意する。