土質力学Ⅰ及び演習（Ｂ班：小高担当）　配付資料 No.7　(2004.5.31)

【各種境界条件下での Terzaghi の圧密方程式の解】

Terzaghi の圧密方程式　$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$　を

(1) 層厚 H の粘土を片面排水条件で解く（問題②）

$u(z,t)=(C_1\cos Az+C_2\sin Az)\cdot\exp(-A^2c_v\cdot t)$　までは，境界条件，初期条件に拘わらず同じ。

境界条件式：　$u(0,t)=\frac{\partial u(H,t)}{\partial z}=0$

$u(0,t)=C_1\cdot\exp(-A^2c_v\cdot t)=0$　　より　$C_1=0$

$\frac{\partial u(H,t)}{\partial z}=AC_2\cos AH\cdot\exp(-A^2c_v\cdot t)=0$　より　$\cos AH=0$

したがって，　$AH=\frac{2n-1}{2}\pi$，　$A=\frac{(2n-1)\pi}{2H}$

整理すると解は　$u(z,t)=C\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z\exp(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)$　となる。

重ね合わせにより一般解は,

$$\boxed{u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z\exp(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)}$$ となる。

n の値に注意する

境界条件を満足する様々な波長の波を合成しており，それぞれの波の振幅 B_n を調整することにより，あらゆる初期条件（関数）にも対応できる。

→フーリエ級数があらゆる関数を近似できるという素晴らしい特性

初期条件式　$u(z,0)=P_0$　から，　$u(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z=P_0$

両辺に，$\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z$ を掛けて 0 から H まで z で積分する。

$$\int_0^H\{(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z\}dz=\int_0^H(P_0\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z)dz$$

直交関数の定理*より,

$$\int_0^H B_n\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2H}zdz=\int_0^H P_0\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}zdz$$

それぞれの波の振幅 B_n をこのように決めたことにより，$u=p_0$（定数）を表現できる。

$$B_n\cdot\frac{H}{2}=\int_0^H(P_0\sin\frac{(2n-1)\pi}{2H}z)dz=\frac{2HP_0}{(2n-1)\pi}$$　より　$$\boxed{B_n=\frac{4P_0}{(2n-1)\pi}}$$

最終的に粘土層厚 H の片面排水条件に対する圧密方程式の解は,

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4P_0}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\exp(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4P_0}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2H}\exp(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4H^2}c_v\cdot t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin\frac{Mz}{H} \exp(-M^2 \frac{c_v \cdot t}{H^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v)$$

（ただし，$M = \frac{(2n+1)}{2}\pi$，$T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$，$Z = \frac{z}{H}$）

(2)層厚 2H の粘土の両面排水条件

境界条件式：　$u(0,t) = u(2H,t) = 0$

$u(0,t) = C_1 \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　　より　$C_1 = 0$

$u(2H,t) = C_2 \sin 2AH \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　より　$\sin 2AH = 0$

したがって，　$2AH = n\pi$，　$A = \frac{n\pi}{2H}$

整理して重ね合わせにより一般解は，$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{2H} z \exp(-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$　となる。

初期条件式　$u(z,0) = P_0$　から，　$u(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{2H} z = P_0$

両辺に，$\sin\frac{n\pi}{2H} z$ を掛けて 0 から 2H まで z で積分する。

$$\int_0^{2H} \{(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{2H} z) \sin\frac{n\pi}{2H} z\} dz = \int_0^{2H} (P_0 \sin\frac{n\pi}{2H} z) dz$$

直交関数の定理*より，

$$\int_0^{2H} B_n \sin^2\frac{n\pi}{2H} z dz = \int_0^{2H} P_0 \sin\frac{n\pi}{2H} z dz$$

$B_n \cdot H = \frac{2HP_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1} + 1\}$　　より　$B_n = \frac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1} + 1\}$

最終的に粘土層厚 $2H$ の両面排水条件に対する圧密方程式の解は，

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1} + 1\} \sin\frac{n\pi z}{2H} \exp(-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4P_0}{(2m+1)\pi} \sin\frac{(2m+1)\pi z}{2H} \exp(-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

ここで，$M = \frac{(2n+1)}{2}\pi$，$T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$，$Z = \frac{z}{H}$　とおけば，

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v)$$

となり，**層厚 H の片面排水の解と同一であることがわかる。**

この結果より，圧密方程式の解を用いる場合は，**排水長（排水距離）:**H における**片面排水条件**を基本とすることに注意。

（終わり）