土質力学Ⅰ及び演習（B班：小高担当）　配付資料 No.6　(2004.5.31)

【Terzaghi の圧密方程式の変数分離法による解法】

偏微分方程式が線形かつ同次であり，さらに境界条件式も線形かつ同次であれば，変数分離法により解析解を得ることができる。

線形： u **，** $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ **，** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ **，** $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ **の一次式で表される。**

同次： u **，** $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ **，** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ **，** $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ **のみで表される**

Terzaghi の圧密方程式　$\dfrac{\partial u}{\partial t} = c_v \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$ とおく，これを圧密方程式に代入すると，

$Z(z) \cdot T'(t) = c_v \cdot Z''(z) \cdot T(t)$　となるが，両辺にそれぞれの変数をまとめるように変形すると，

$\dfrac{1}{c_v}\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{Z''(z)}{Z(z)} = const.$　$(= \underline{-A^2})$ とおく

天下り的に，この定数は負としているが，実はこの定数が正の場合は，境界条件を満たす有意な解は得られない。試しに，正と仮定して計算してみること。

結局，以下の t, z それぞれの常微分方程式で表すことができる。

$$T'(t) = -A^2 c_v T(t) \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$Z''(z) = -A^2 Z(z) \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

①より，

$$T(t) = C_1 \exp(-A^2 c_v \cdot t)$$

②より，

$$Z(z) = C_2 \cos Az + C_3 \sin Az$$

それぞれの解の積が u の解となる。すなわち，

$$u(z,t) = (C_4 \cos Az + C_5 \sin Az) \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t)$$

次に，境界条件式および初期条件式を用いて積分定数を決定する。

問題①（粘土層厚 H の両面排水条件）

境界条件式：　$u(0,t) = u(H,t) = 0$

$u(0,t) = C_4 \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　　より　$C_4 = 0$

$u(H,t) = C_5 \sin AH \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$　より，　$\sin AH = 0$

したがって，　$AH = n\pi$，　$A = \dfrac{n\pi}{H}$

整理すると解は　$u(z,t)=C\sin\frac{n\pi}{H}z\exp(-\frac{n^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$　となる。

一般解は，任意の n の解の重ね合わせで表すことができるので，

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{H}z\exp(-\frac{n^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$$

となる。

さらに，初期条件式を使って，定数係数 B_n を求める。

初期条件式　$u(z,0)=P_0$　から，

$$u(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{H}z=P_0$$

両辺に，$\sin\frac{n\pi}{H}z$ を掛けて 0 から H まで z で積分する。

$$\int_0^H\{(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{H}z)\sin\frac{n\pi}{H}z\}dz=\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz$$

直交関数の定理*より，

$$\int_0^H(B_n\sin\frac{n\pi}{H}z\cdot\sin\frac{n\pi}{H}z)dz=\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz$$

$$B_n\cdot\frac{H}{2}=\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz$$

$$B_n=\frac{2}{H}\cdot\int_0^H(P_0\sin\frac{n\pi}{H}z)dz=\frac{2P_0}{H}\left[-\frac{H}{n\pi}\cos\frac{n\pi z}{H}\right]_0^H$$

$$=\frac{2P_0}{H}(-1)\frac{H}{n\pi}\{(-1)^n-1\}=\frac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1}+1\}$$

*直交関数の定理

$$\int_0^1\sin m\pi x\sin n\pi x dx=\frac{1}{2}\delta_{mn}$$

$$\delta_{mn}=\begin{Bmatrix}1\ (m=n\text{のとき})\\0\ (m\neq n\text{のとき})\end{Bmatrix}$$

最終的に問題①（粘土層厚 H の両面排水条件）に対する圧密方程式の解は，

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2P_0}{n\pi}\{(-1)^{n+1}+1\}\sin\frac{n\pi z}{H}\exp(-\frac{n^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4P_0}{(2m+1)\pi}\sin\frac{(2m+1)\pi z}{H}\exp(-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{H^2}c_v\cdot t)$$