土質力学Ⅰ及び演習（B班：小高担当）　配付資料 No.5 （2004.5.31）
【圧密方程式の誘導】

(1)瞬間載荷問題における Terzaghi の圧密方程式の誘導（今期はこれを覚えればよい）

①連続式 $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial z}$ に ②ダルシー則 $v=-k\dfrac{\partial h}{\partial z}\left(=\dfrac{k}{\gamma_w}\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ を代入して得られる

$\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-\dfrac{k}{\gamma_w}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ （式①） と

③構成式 $d\varepsilon=m_v\cdot d\sigma'$ を時間微分して得られる $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}=m_v\dfrac{\partial \sigma'}{\partial t}$ に，

④時間に対して荷重（全応力）は一定という条件*（瞬間載荷問題） $\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}\left(=\dfrac{\partial \sigma'}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)=0$ を変形した

$\dfrac{\partial \sigma'}{\partial t}=-\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を代入して得られる，

$\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-m_v\dfrac{\partial u}{\partial t}$ （式②） を等値することにより（要するに式①と②の右辺どうしが＝），

Terzaghi の圧密方程式 $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\quad \left(c_v=\dfrac{k}{m_v\gamma_w}\right)}$ を得る。

注意：

*力の釣り合い式 $\dfrac{\partial \sigma(z,t)}{\partial z}=0$（自重を無視） より，全応力$\sigma$は深さ方向に対して一定であり，$t$ のみの関数であることがわかる。そこで，Terzaghi の圧密方程式では，さらに時間に対しても全応力は一定であることを仮定するために，④の条件式がでてくる。すなわち，力の釣り合い式の $\partial\sigma/\partial z=0$ という条件がなければ，$\partial\sigma/\partial t$ は 0 ではなく z の関数でもよいことになる。そういう点では，力の釣り合い式を暗に用いていることになっている。

(2)漸増載荷問題における三笠の圧密方程式による解法（こういう解法もあるという紹介）

(2)-1 三笠の圧密方程式

Terzaghi の圧密方程式は，時間に対して荷重は一定という特殊な条件から導かれているため，瞬間的に荷重が載荷されて，そのまま一定である問題しか扱えない。その欠点を改善したのが三笠の圧密方程式である。

力の釣り合い式 $\dfrac{\partial \sigma}{\partial z}=\dfrac{\partial \sigma'}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ より，$\dfrac{\partial \sigma'}{\partial z}=-\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\gamma_w\dfrac{\partial h}{\partial z}=\gamma_w\cdot i$ が得られ，

ダルシー則 $v=k\cdot i$ を適用することにより，

$v=\dfrac{k}{\gamma_w}\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}$ を得る。これに，構成式 $d\varepsilon=m_v\cdot d\sigma'$ を z で微分して得られる $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}=m_v\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}$ を適用すれば，$v=\dfrac{k}{m_v\gamma_w}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}$ となる。これに，連続式 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial z}$ を使えば,

$\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}(\dfrac{k}{m_v\gamma_w}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z})$ となり，z に対して $\dfrac{k}{m_v\gamma_w}=c_v$ が一定と仮定すれば,

三笠の圧密方程式 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}$ を得る。

(2)-2　三笠の圧密方程式の漸増載荷問題への適用

三笠の圧密方程式で漸増載荷問題を解く。漸増載荷問題とは，時間の経過とともに荷重が増える問題であり，実際には瞬間載荷などあり得ないので，実問題のほとんどは漸増載荷問題である。

漸増載荷条件は $\sigma'(z,t)+u(z,t)=P(t)$ となる。（$P(t)=0$ は瞬間載荷問題である）

上式より，$\dfrac{\partial\sigma'}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial P(t)}{\partial t}$ （式③）となる。また，力の釣り合い式より $\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}=\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ となるが，もう一度 z で微分しておくと，$\dfrac{\partial^2\sigma'}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ （式④）となる。

また，三笠の圧密方程式 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}$ に，構成式 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}=m_v\dfrac{\partial\sigma'}{\partial z}$ をもう一度適用すれば,

$\dfrac{\partial\sigma'}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2\sigma'}{\partial z^2}$ となるので，これに式③と④を代入すると,

結局 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial P(t)}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ となる。

ここで，$u(z,t)=P(t)+V(z,t)$ とおいて変数変換してやると,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ および $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial P(t)}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial t}$ より

$\dfrac{\partial V}{\partial t}=c_v\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ と変形でき，あとは境界条件にさえ気を付ければ解くことが可能となる。