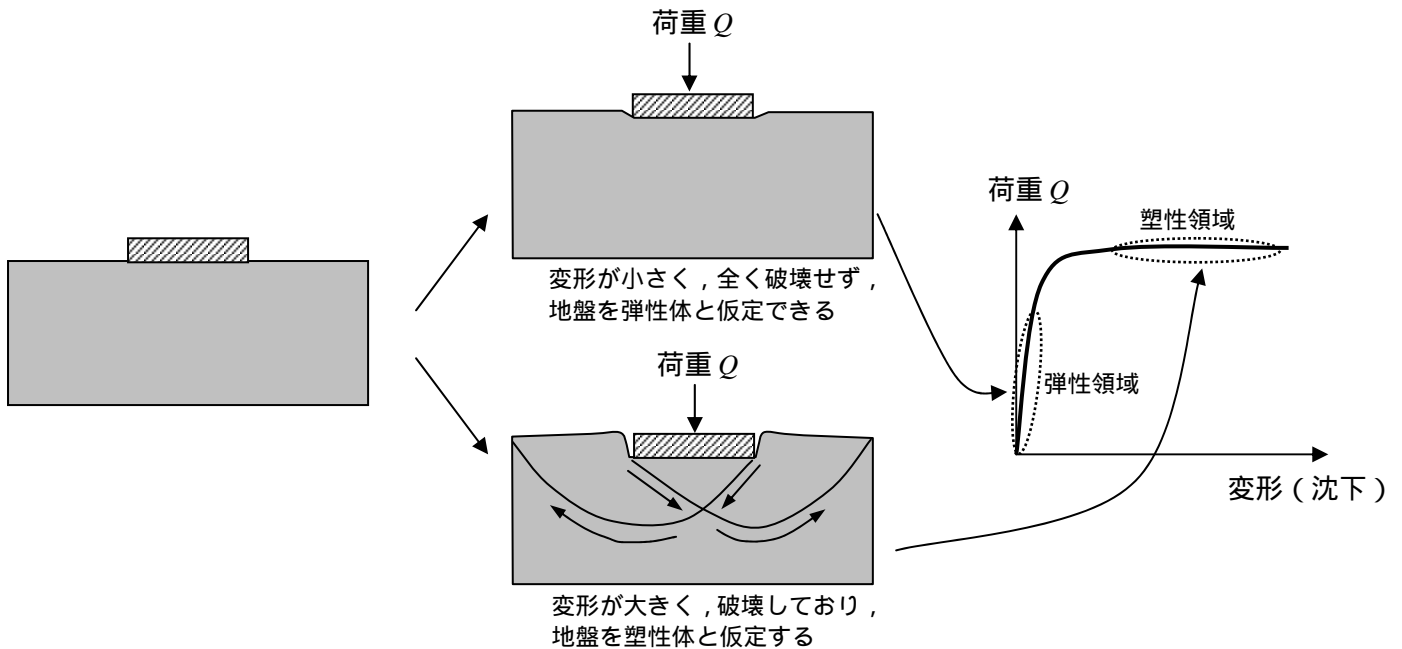


【地盤内応力 (Introduction)】

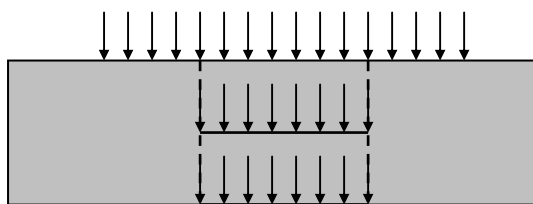
(1) 古典土質力学の2大勢力 (弾性論と塑性論)

下図のように、地盤上にある荷重を載荷した時の挙動を予測する場合、古典土質力学 (この授業の大半で扱っている土質力学) では、大きく2つの場合に分けて考える。すなわち、全く破壊しない場合と破壊してしまう場合である。全く破壊しない場合というのは、荷重～変形 (沈下) 曲線で見れば、変形が小さい弾性領域であり、破壊してしまう場合とは変形が大きく塑性領域にある場合である。したがって、変形が小さい場合には弾性論を用い、破壊する場合には塑性論を用いる (もっと正確に言えば、破壊までの変形を無視して破壊している状態のみを論じる)。ここでは、変形が小さいために地盤がまだ弾性領域にあると仮定して、弾性論を適用して地盤内の応力状態を予測する手法について学ぶ。なお、後期の土質で学ぶ、「土圧」、「支持力」、「斜面安定」はすべて、地盤の破壊を扱うために塑性論を用いる。前回まで学んだ「土のせん断強さ」はそれらの塑性論を展開するための準備であった。

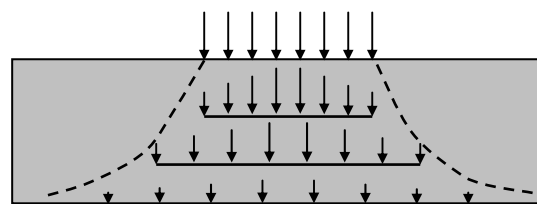


(2) 地盤内応力の位置づけ

圧密理論では、非常に広い範囲の荷重 (無限の幅の荷重) を想定して1次元で近似した。その場合には、上載荷重による応力増分は、そのまま地盤の奥深くまで伝播し、地盤内の応力分布は一樣であった。しかし、実際は荷重の形は有限であり、上載荷重による応力増分は、3次元的に伝播するために、地盤の深度や荷重からの距離に応じて地盤内の応力分布は異なる。この様子を弾性論を用いて予測することを試みる。



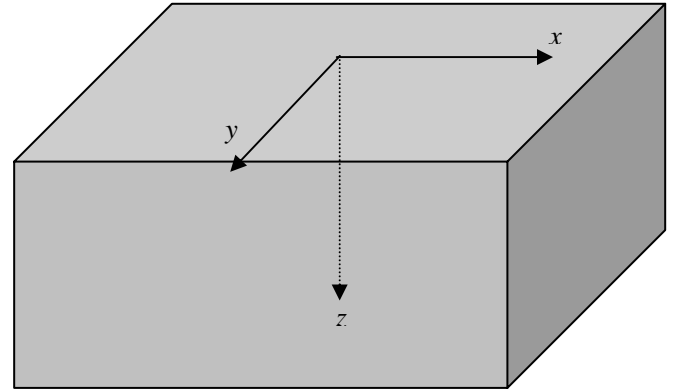
応力の伝播が1次元で仮定でき、深さ方向に減衰しない場合 (1次元圧密理論での考え方)



応力の伝播が3次元的であり、深さ方向にも水平方向にも減衰する場合 (実際問題、地盤内応力の考え方)

(3)地盤内応力を求めるための仮定

地盤は等方均質な線形弾性体であると仮定する。
また、右図のように座標をとれば、深さ z 方向の負の領域を除いて、 x の正負、 y の正負、 z の正のいずれの方向にも地盤は無限に続くと仮定する。



このような地盤を「半無限弾性地盤」と呼ぶ。

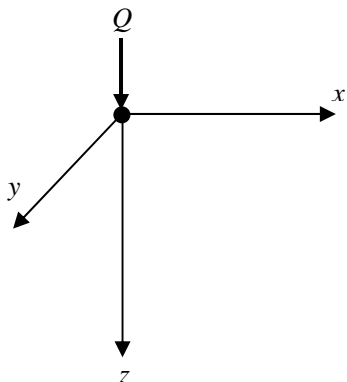
線形弾性体であることの利点は、
解が求められる。

その解を重ね合わせて（積分して or 足し合わせて）、
さらにいろいろなバリエーションについての解を
求めることができる。

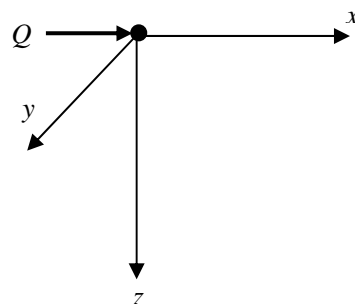
という2つの点が非常に重要である。

(4)地盤内応力を求めるための4つの代表的な弾性解

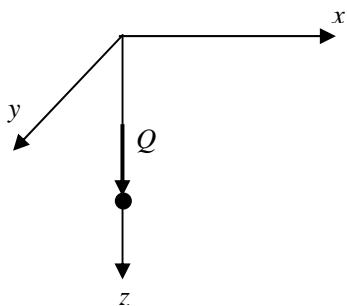
地盤を半無限弾性地盤と仮定できた場合、次の4つの場合について代表的な弾性解が求められている。それぞれの弾性解にはそれを求めた人の名前が付いている。下図の意味することは、該当する点にそれぞれの方向から Q という荷重を与えた時、半無限弾性地盤内のいかなる点の応力でも求められるということである。



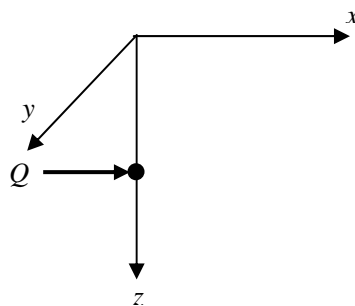
Boussinesq (ブシネスク) の解



Cerruti (セルッティ) の解



Mindlin (ミンドリン) の解



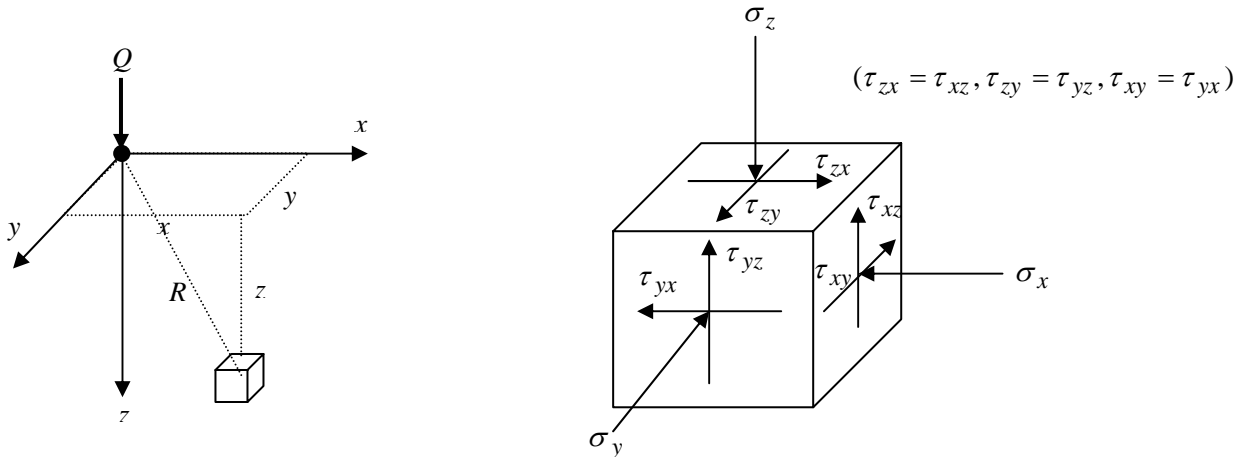
Mindlin (ミンドリン) の解

この中でも特に、地盤への上乗荷重の問題に適用できる Boussinesq の解が非常に重要である。Boussinesq の解は上図のように、点荷重の場合の解であるが、線形弾性体であるので重ね合わせをする（積分する）ことができ、様々な形状の上乗荷重の場合についての地盤内応力の弾性解を求めることができる。

【地盤内応力 (Boussinesq の弾性解)】

半無限弾性地盤の Boussinesq の解は 3次元場で表されるが、適用する問題に応じて座標系を変えることにより、より使いやすくなる場合が多い。ここでは、基本となる直交座標系と、それから求められる円筒座標系、極座標系での解を示す。

(1)直交座標系



各応力の成分は、

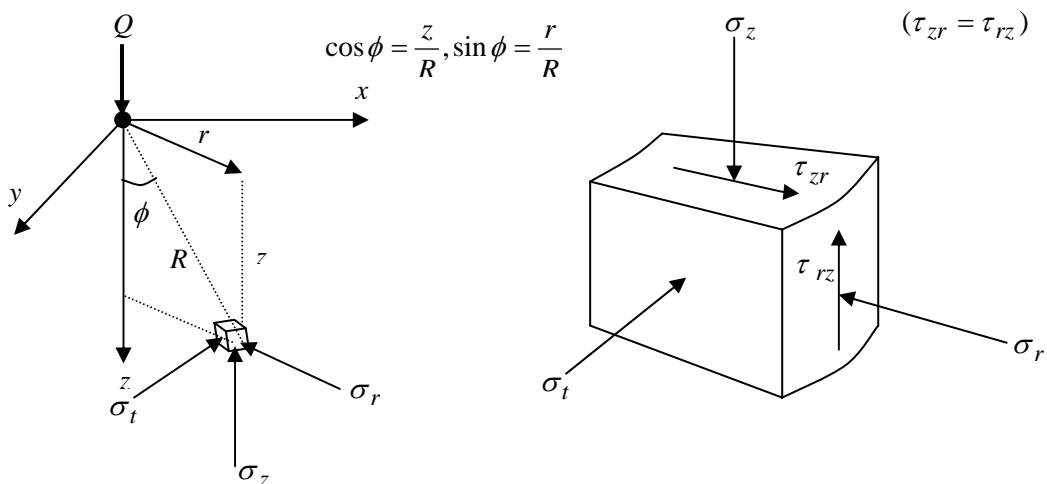
$$\sigma_x = \frac{3Q}{2\pi} \left[\frac{zx^2}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{R^3(R+z)^2} \right) \right], \quad \sigma_y = \frac{3Q}{2\pi} \left[\frac{zy^2}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{R^3(R+z)^2} \right) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5}, \quad \tau_{xy} = \frac{3Q}{2\pi} \left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\nu}{3} \frac{xy(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right], \quad \tau_{zx} = \frac{3Qz^2x}{2\pi R^5}, \quad \tau_{zy} = \frac{3Qz^2y}{2\pi R^5}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

変位の成分は、

$$u_x = \frac{Qx}{4\pi G} \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z)} \right], \quad u_y = \frac{Qy}{4\pi G} \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+z)} \right], \quad u_z = \frac{Q}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{R^3} - \frac{2(1-\nu)}{R} \right]$$

(2)円筒座標系



各応力の成分は、

$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5} = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^5 \phi, \quad \sigma_r = \frac{Qz^3}{2\pi R^2} \left[\frac{3r^2 z}{R^3} - (1-2\nu) \frac{R}{R+z} \right] = \frac{Q}{2\pi R^2} \left[3\cos^3 \phi \sin^2 \phi - (1-2\nu) \frac{\cos^2 \phi}{1+\cos \phi} \right],$$

$$\sigma_t = -(1-2\nu) \frac{Q}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) = -(1-2\nu) \frac{Q}{2\pi z^2} \left(\cos^3 \phi - \frac{\cos^2 \phi}{1+\cos \phi} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{3Qrz^2}{2\pi R^5} = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^4 \phi \sin \phi$$

(3) 直交座標系と円筒座標系の応力の成分の関係

鉛直方向の垂直応力 σ_z は直交座標系でも、円筒座標系でも共通で同じものである。

円筒座標系での半径方向の垂直応力 σ_r は、直交座標系での「 x 軸上で $x=r$ の時の σ_x 」あるいは、「 y 軸上で $y=r$ の時の σ_y 」に相当する。式示すと、

$$\sigma_r = (\sigma_x)_{x=r} = (\sigma_y)_{y=r} \quad \text{実際に計算してみると、成り立つことは明らか。}$$

また、円筒座標系での円周方向の垂直応力 σ_t は、直交座標系での「 x 軸上で σ_y 」あるいは、「 y 軸上での σ_x 」に相当する。式示すと、

$$\sigma_t = (\sigma_x)_{x=0} = (\sigma_y)_{y=0} \quad \text{これも成り立つことは明らかである。}$$

同様に、円筒座標系でのせん断応力 $\tau_{rz} (= \tau_{zr})$ は、直交座標系での「 x 軸上で τ_{zx} 」あるいは、「 y 軸上での τ_{zy} 」に相当する。式示すと、

$$\tau_{rz} = (\tau_{zx})_{y=0} = (\tau_{yz})_{x=0} \quad \text{これも成り立つ。}$$

最後に、円筒座標系の図には示されていないが、 $\tau_{rz} (= \tau_{zr})$ 以外のせん断応力はどうなっているのだろうか。

円筒座標系でのせん断応力 $\tau_{tz} (= \tau_{zt})$ は、直交座標系での「 x 軸上で τ_{zy} あるいは τ_{yz} 」に相当する。また、円筒座標系でのせん断応力 $\tau_{tr} (= \tau_{rt})$ は、直交座標系での「 x 軸上で τ_{xy} あるいは τ_{yx} 」に相当する。それぞれについて式示すと、

$$\tau_{tz} = (\tau_{zy})_{y=0} = (\tau_{yz})_{y=0} = 0, \quad \tau_{tr} = (\tau_{xy})_{y=0} = (\tau_{yx})_{y=0} = 0$$

いずれも簡単な計算でゼロになることがわかる。

円筒座標系では、円周方向に対称（軸対称と呼ぶ）であるため、円周方向に働くせん断応力は存在しない。したがって、 τ_{rt} や τ_{zt} は存在しないので、それと共役な τ_{tr} や τ_{tz} も存在しない。

(4) 鉛直垂直応力 σ_z

地盤の沈下予測等に用いることを考えると、地盤内応力の中でも鉛直応力が最も重要となる。

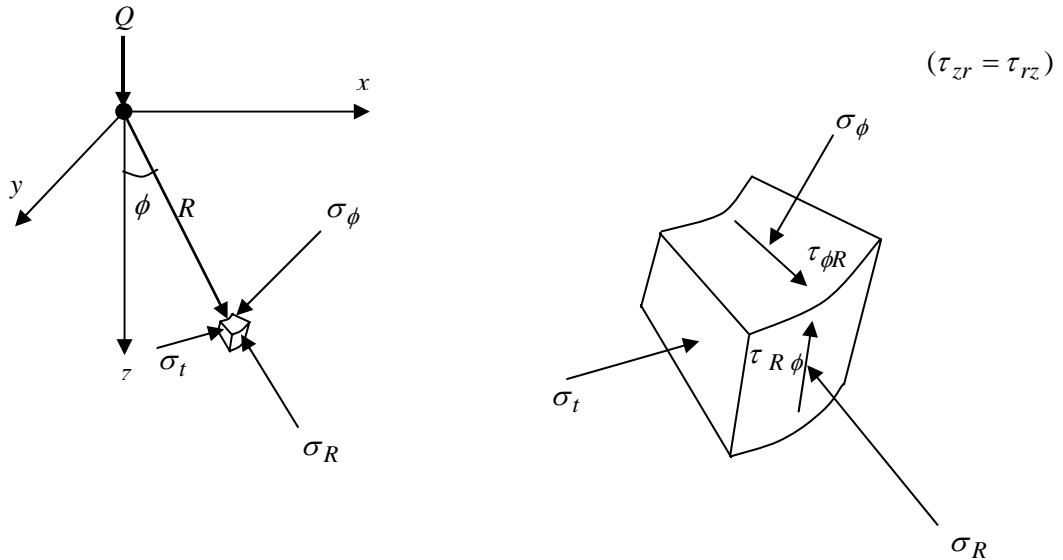
$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5} = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^5 \phi \quad \text{を見てもわかるように、この応力に限っては、中に弾性係数（ G や ν ）が含まれて}$$

いない。これは、鉛直垂直応力に関しては、弾性係数すなわち地盤の硬さとは無関係であることを意味しており、軟らかい粘土地盤であっても、硬い砂地盤であっても、鉛直応力は同じ値となり、鉛直応力の合力は鉛直荷重 Q につり合う。軟らかすぎの粘土地盤などは、弾性体と仮定できないこともあるが、鉛直の力のつり合いを満たすように鉛直応力が決まるとすれば、多少非弾性であっても、結果に大きな違いはない。

弾性論による地盤内応力の弾性解は、極端に理想化された条件で求められた解であるが、最も注目すべき鉛直応力が地盤を構成する材料の性質に無関係に決まることは、弾性解の利用上、非常に重要である。もし、地盤を

構成する材料によって、この弾性解が変わっていたとすれば、それを利用するためにはまず弾性定数を決めなければならなくなり、必ず地盤調査が必要になる上、応力解の予測精度が弾性係数の予測精度ともなり、ここまで実務で用いられることは無かったと考えられる。

(5) 極座標系



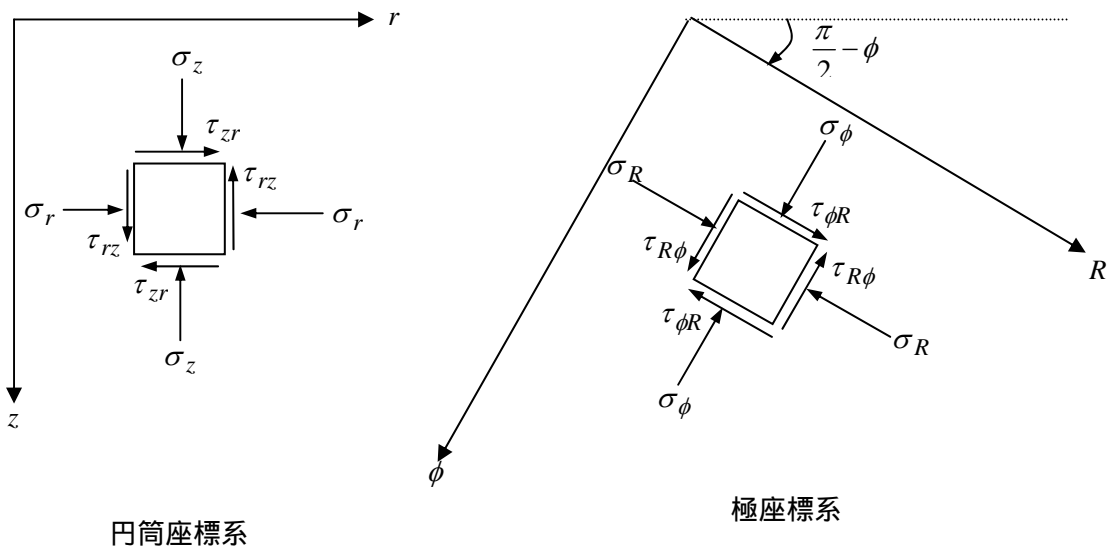
各応力の成分は、

$$\sigma_R = \frac{Q}{2\pi R^2} [2(2-\nu)\cos\phi - (1-2\nu)] , \quad \sigma_\phi = -(1-2\nu)\frac{Q}{2\pi R^2} \frac{\cos^2\phi}{1+\cos\phi} , \quad \sigma_t = -(1-2\nu)\frac{Q}{2\pi R^2} \left(\cos\phi - \frac{1}{1+\cos\phi} \right) ,$$

$$\tau_{R\phi} = -(1-2\nu)\frac{Q}{2\pi R^2} \frac{\cos\phi\sin\phi}{1+\cos\phi}$$

(6) 極座標系と円筒座標系の応力の成分の関係

いずれの座標系でも、z 軸を中心として円周方向に対称となっているので、 σ_t は共通であり、また円筒座標系と同様に、 σ_t が作用する面にはせん断応力は作用しない。あとは、それ以外の 2 方向の面であるが、それらの面だけの 2 次元で表すと、両座標系の間には下図のような関係がある。



円筒座標系

極座標系

したがって、下記のような以前学んだ座標変換（配布資料 No.13 参照）を当てはめる。

元の座標系 座標変換後の座標系

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \quad \sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta,$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

円筒座標系を元の座標系と考え、上の関係式で $\sigma_x = \sigma_z, \sigma_y = \sigma_r, \tau_{xy} = \tau_{zr}$ として、 $\theta = -(\frac{\pi}{2} - \phi)$ で座標変換すれば、極座標は変換後の座標系に相当し、 $\sigma'_x = \sigma_\phi, \sigma'_y = \sigma_R, \tau'_{xy} = \tau_{R\phi}$ と考える。結局、円筒座標系での応力の成分と極座標での応力の成分の関係式は以下ようになる。

$$\sigma_\phi = \frac{\sigma_z + \sigma_r}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \cos 2\phi - \tau_{zr} \sin 2\phi, \quad \sigma_R = \frac{\sigma_z + \sigma_r}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \cos 2\phi + \tau_{zr} \sin 2\phi,$$

$$\tau_{R\phi} = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \sin 2\phi - \tau_{zr} \cos 2\phi$$

(7)おわりに

以上のように、3つの座標系を用いて、Boussinesqの弾性解を示したが、これらは皆点荷重荷重に対する半無限地盤内での応力分布を求めるものであった。実際の構造物から加わる荷重形状は、面的な広がりを持つものであるので、点荷重荷重で得られた弾性解を適宜積分して、2次元あるいは3次元荷重として扱えるようにする。その際、地盤内でどの方向を応力の成分を知りたいかによって、3つの座標系で得られた応力を使い分ける。

【積分による各種地盤内応力の求め方】

(1)線荷重による地盤内応力

Boussinesq の弾性応力解によって、鉛直な点荷重が地表面に載荷されたときの地盤内の応力分布を計算する。線形弾性理論を用いているので、単純に積分(足しあわせ)をしてやれば良い。

今、地表面(xy平面, z=0)上で、さらに y 軸(x=0)上を無限に続いている線荷重を考える。この場合、任意の xyz 座標の地盤内応力を考える場合、y はどの座標値であっても同じとなる。すなわち、地盤内応力は右図のように xz の3つの2次元成分だけ考えれば良い。

以下に具体的な計算を示す。

点荷重 Q から深さ z, 距離 R の座標点における Boussinesq の鉛直地盤内応力は、

$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5}$$

である。これを線荷重の場合に適用する。すなわち、微小区間 dy に載荷される荷重 dQ は

$$dQ = qdy \quad (\text{kN})$$

であるので、これを点荷重と見なせば、距離 R 離れた地盤内応力は以下ようになる。

$$d\sigma_z = \frac{3dQz^3}{2\pi R^5} = \frac{3(qdy)z^3}{2\pi R^5} = \frac{3qz^3}{2\pi R^5} dy \quad (1)$$

最終的に xz 平面の2次元問題となるために、その面でのパラメータだけにするために、y および R を r で置き換える

$$\text{すなわち、} y = r \tan \alpha \quad \text{および} \quad R = \frac{r}{\cos \alpha}$$

最終的に線荷重による地盤内応力は、(1)式を $-\infty$ から ∞ まで積分したものであるから、

$$\sigma_z = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} d\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3qz^3}{2\pi R^5} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3qz^3}{\pi} \left(\frac{\cos^5 \alpha}{r^5} \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3qz^3}{\pi} \left(\frac{\cos^5 \alpha}{r^5} \right) \left(\frac{r}{\cos^2 \alpha} \right) d\alpha = \frac{3qz^3}{\pi r^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha d\alpha$$

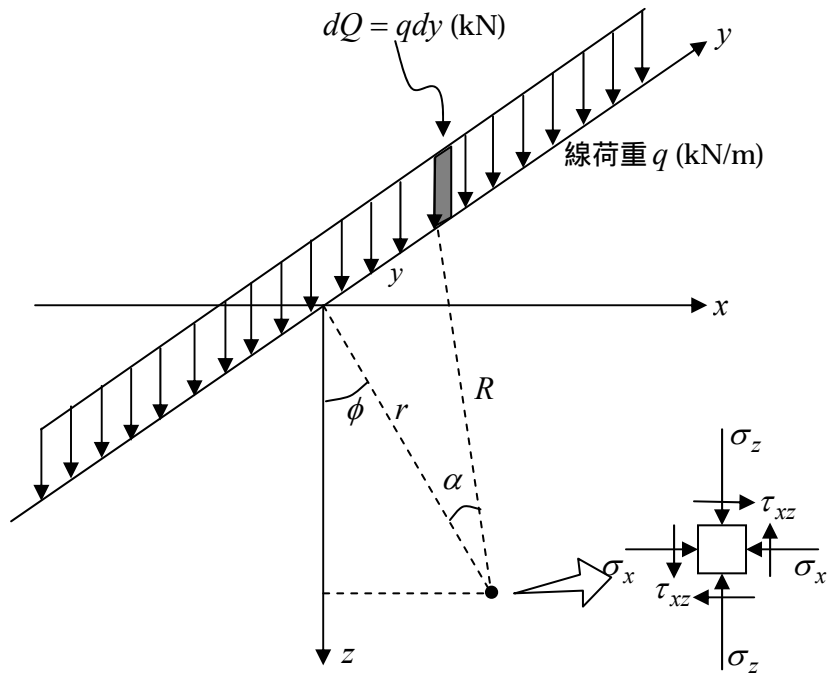
なお、y から α へ変数変換するのにあたり、 $y = r \tan \alpha$ の両辺を微分した下式を用いている。

$$dy = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad (y \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2})$$

計算の結果、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha d\alpha = \frac{2}{3}$ 、および z と r の関係式 $z = r \cos \phi$ より

$$\sigma_z = \frac{3qz^3}{\pi r^4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2q}{\pi} \cdot z^3 \cdot \left(\frac{\cos \phi}{z} \right)^4 = \frac{2q}{\pi} \cos^4 \phi \quad \therefore \sigma_z = \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi$$

以上とほぼ同様の計算で、 $\sigma_x = \frac{2q}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi$ と $\tau_{xz} = \frac{2q}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi$ も得ることができる。



(2) 帯荷重による地盤内応力

微小区間 dx に線荷重 (紙面奥行き方向に無限につながる荷重) $dQ = qdx$ が載荷されている時、
 載荷位置から水平に x 、深さ z 離れた地中での地盤内応力は、前ページ(1)の結果より、

$$d\sigma_z = \frac{2qdx}{\pi z} \cos^4 \phi$$

$$d\sigma_x = \frac{2qdx}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi$$

$$\tau_{xz} = \frac{2qdx}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi$$

となる。まず鉛直荷重 σ_z を考える。

$$x = z \tan \phi \text{ より } dx = \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi \text{ を用いて,}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \int_{x=x_1}^{x=x_2} d\sigma_z = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \left[\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} [\phi + \sin \phi \cos \phi]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) + \sin \beta_2 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_1\} \\ &= \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) + \sin(\beta_2 - \beta_1) \cos(\beta_2 + \beta_1)\} \end{aligned}$$

$2\theta = \beta_2 - \beta_1$ および $2\varphi = \beta_2 + \beta_1$ とおけば、最終的に σ_z は次式となる。

$$\therefore \sigma_z = \frac{q}{\pi} (2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

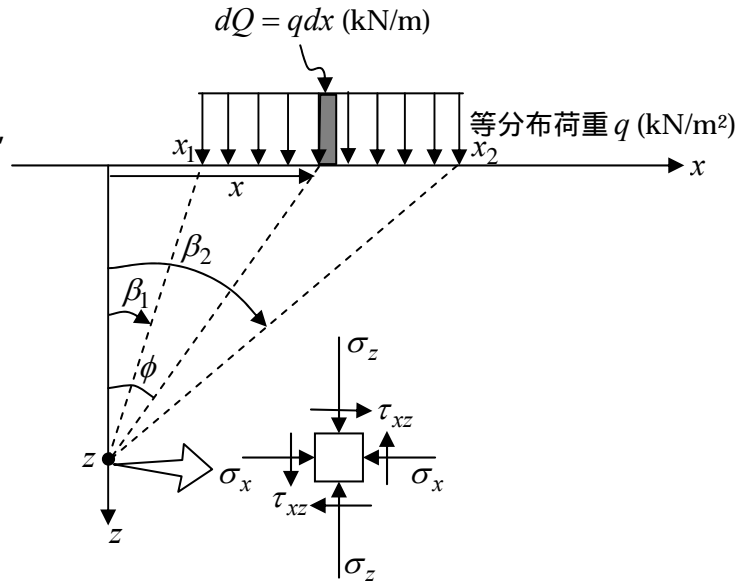
同様の手順で、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \int_{x=x_1}^{x=x_2} d\sigma_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^2 \phi \sin^2 \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin^2 \phi d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right) d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \left[\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} [\phi - \sin \phi \cos \phi]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) - (\sin \beta_2 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_1)\} \\ &= \frac{q}{\pi} \{(\beta_2 - \beta_1) - \sin(\beta_2 - \beta_1) \cos(\beta_2 + \beta_1)\} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{q}{\pi} (2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \int_{x=x_1}^{x=x_2} d\tau_{xz} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{2q}{\pi z} \cos^3 \phi \sin \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \phi \cos \phi d\phi = \frac{2q}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\frac{\sin 2\phi}{2} \right) d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sin^2 \phi \right]_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{q}{\pi} (\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1) = \frac{q}{\pi} \sin(\beta_2 + \beta_1) \sin(\beta_2 - \beta_1) \end{aligned}$$

$$\therefore \tau_{xz} = \frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi$$



(3) 帯荷重による地盤内応力の主応力

$$\sigma_z = \frac{q}{\pi}(2\theta + \sin 2\theta \cos 2\varphi), \quad \sigma_x = \frac{q}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta \cos 2\varphi),$$

$$\tau_{xz} = \frac{q}{\pi} \sin 2\theta \sin 2\varphi \text{ より}$$

モールの応力円を描けば右図のようになる。ただし、鉛直応力 σ_z の方が、水平応力 σ_x より大きいことを前提とした。

円の中心の座標は、

$$\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{2\theta}{\pi}$$

であり、円の半径は、

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{q}{\pi} \sin 2\theta$$

であるので、最大および最小主応力は以下のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{q}{\pi}(2\theta + \sin 2\theta) \quad \text{および} \quad \sigma_3 = \frac{q}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta)$$

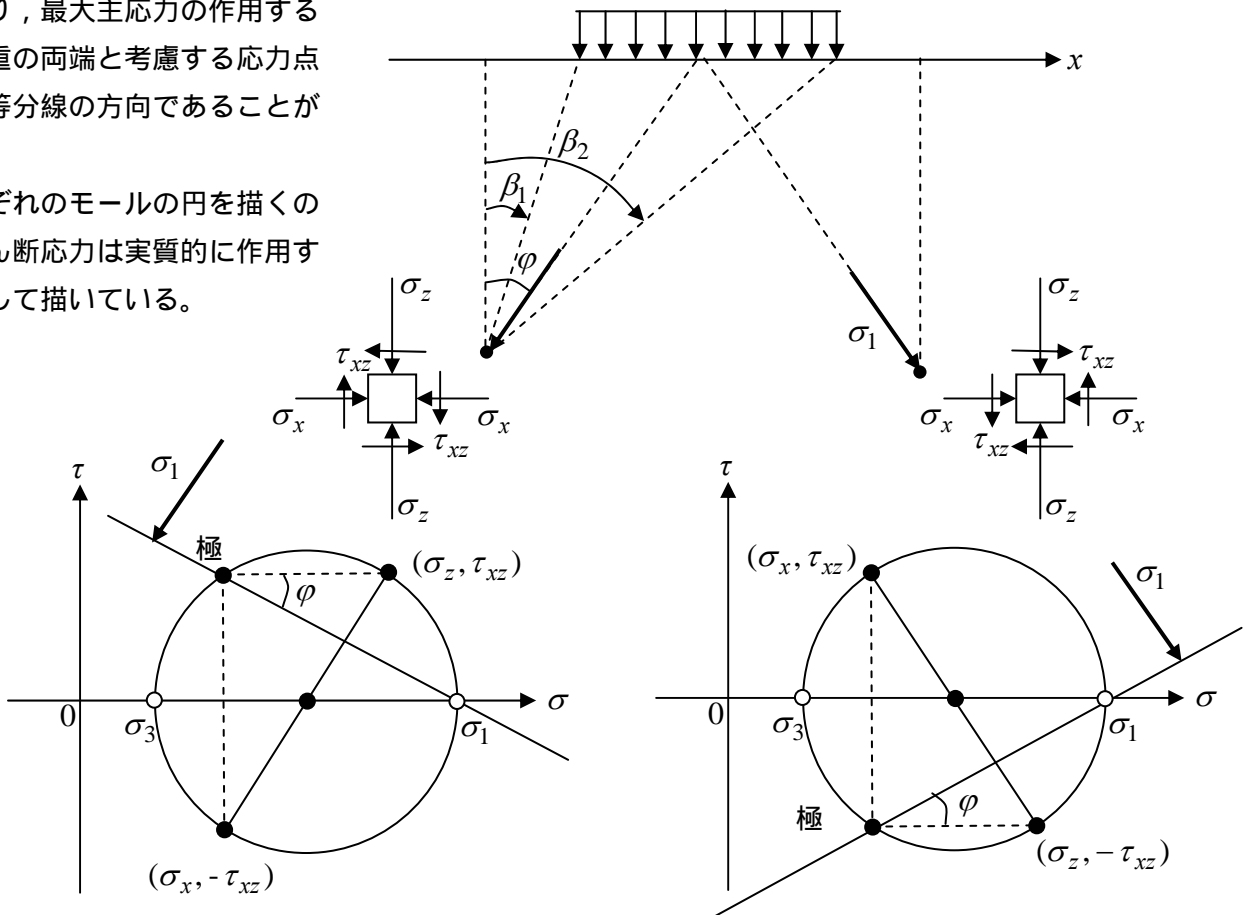
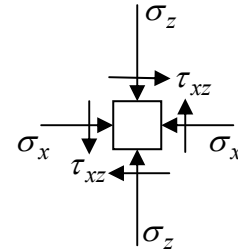
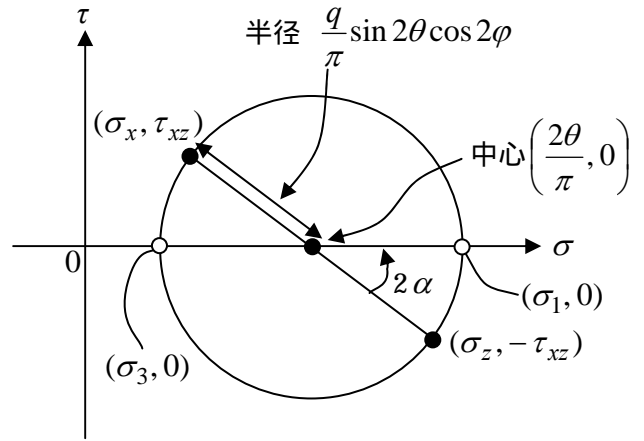
また、最大主応力 σ_1 が作用する面は σ_z が作用する面（すなわち水平面）から反時計回りに α 回転した面であるが、その角度を具体的に計算すると、

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x} = \tan 2\varphi \quad \therefore \alpha = \varphi = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}$$

となる。

右下の図より、最大主応力の作用する方向は、帯荷重の両端と考慮する応力点で作る角の2等分線方向であることがわかる。

なお、それぞれのモールの円を描くのにあたり、せん断応力は実質的に作用する方向を規定して描いている。



(4) 三角形帯荷重による地盤内応力

x 軸の方向に右図のような三角形分布の帯荷重を考
える（紙面奥行き方向に無限につながっている）

座標 x の位置に作用する分布荷重を

$$q(x) = q\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

とすれば、微小区間 dx での線荷重は

$$dQ = q\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx$$

となり、水平距離 x、深さ z の位置の鉛直地盤内応
力は、

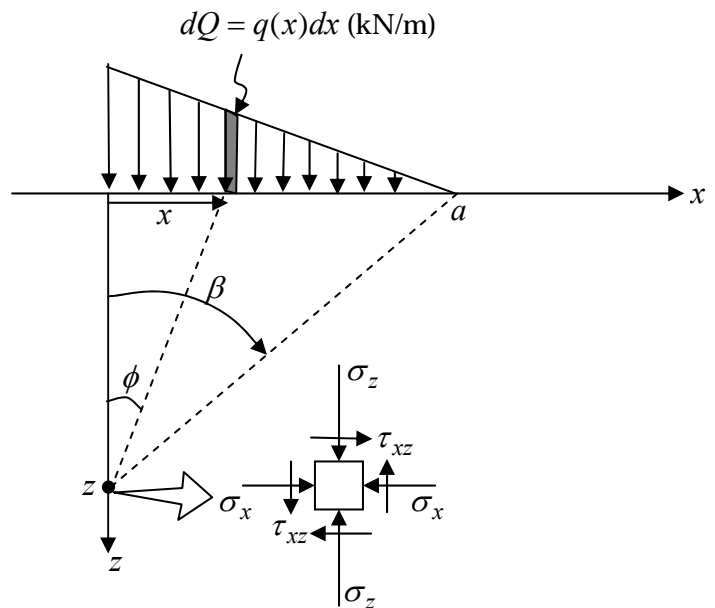
$$d\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos^4 \phi dx$$

となる。

$x = z \tan \phi$ より、 $dx = \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi$ となる。ただし、 $0 \leq x \leq a \rightarrow 0 \leq \phi \leq \beta (= \tan^{-1}(\frac{a}{z}))$ であることに注意する。

結局、

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \int_{x=0}^{x=a} d\sigma_z = \int_0^a \frac{2q}{\pi z} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos^4 \phi dx = \int_0^\beta \frac{2q}{\pi z} \left(1 - \frac{z \tan \phi}{a}\right) \cos^4 \phi \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \int_0^\beta \frac{2q}{\pi} \left(1 - \frac{z}{a} \tan \phi\right) \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{2q}{\pi} \int_0^\beta \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi - \frac{2q}{\pi} \int_0^\beta \sin \phi \cos \phi d\phi \\ &= \frac{q}{\pi} \beta = \frac{q}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{z}\right) \end{aligned}$$



【地盤内応力(圧力球根他)】

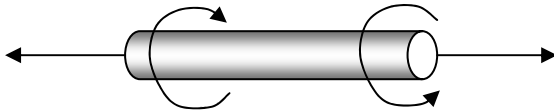
(1)線形弾性体と重ね合わせ

弾性体：物体に力を加えた時に変形するが、その変形が可逆的な場合にその物体を弾性体と呼ぶ。

線形弾性体：さらに、作用させる力とそれに対する変形が常に一定の割合である時、その弾性対を線形弾性体と呼ぶ。

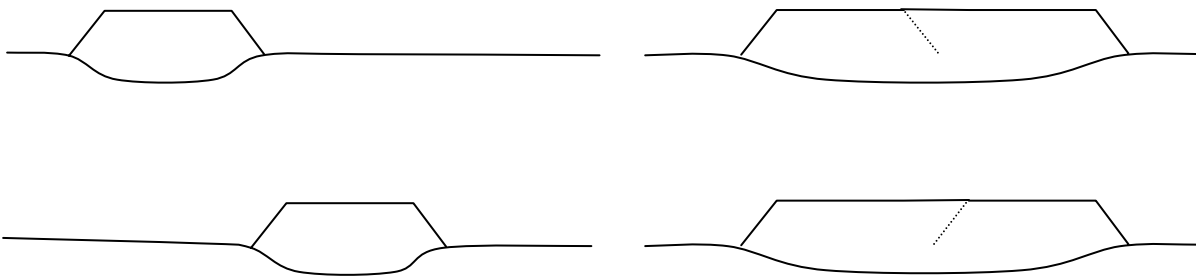
問：線形弾性体(例えばゴム)のできた棒を考える。この棒を、引っ張ってから、ねじると、ねじってから、引っ張るとでは、最終的な変形は違うか？

答：同じ



問：弾性変形と仮定できる範囲での、それほど大きくない盛土荷重を考える。盛土を分割して施工する場合、右から施工してから左を施工する場合と、左から施工してから右を施工する場合と、できあがった盛土全体による変形は異なるか？

答：同じ(線形弾性体は、最初と最後の応力状態さえ分かれば、変形は決定される)



ただし、実際の地盤は、完全な線形弾性体ではないので、このように極端に施工過程を変えると、最終的な変形は当然異なってしまう。弾塑性体は、最終状態までの時々刻々の応力の変化(応力履歴)が変形に大きく影響を与えるからである。

このように、線形弾性体は、応力もひずみも(荷重も変形も)足し合わせが可能であることが最大の特徴であり、図表を用いて単純に足したり引いたりして簡単に地盤内応力が推定できる。

(2)圧力球根

地盤内での σ_z の分布を表したものを圧力球根と呼ぶ。図のように、地中に埋まった球根のように見えるからである。

点荷重(集中荷重)

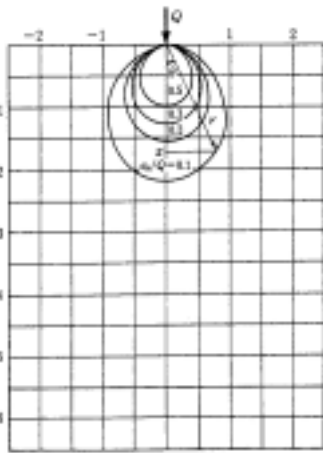
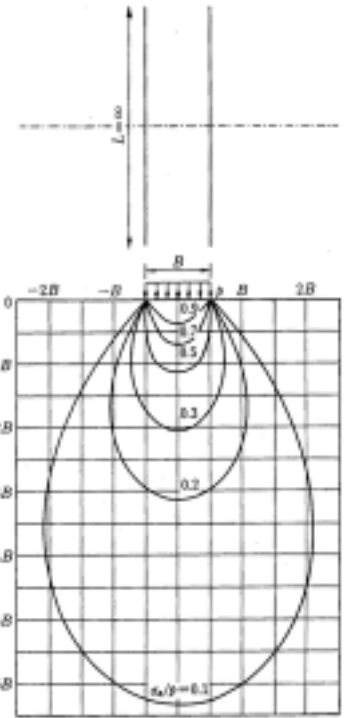
$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5} = \frac{3Q}{2\pi R^2} \cos^3 \phi \quad \text{より} \quad \frac{\sigma_z}{Q} = \frac{3}{2\pi R^2} \cos^3 \phi = k \text{ (一定) を図示したもの。}$$

線荷重

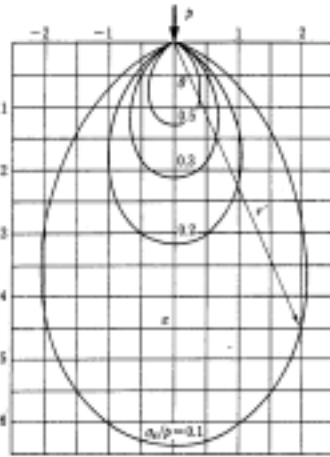
$$\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} \cos^4 \phi = \frac{2q}{\pi r} \cos^3 \phi \quad \text{より} \quad \frac{\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi r} \cos^3 \phi = k \text{ (一定) を図示したもの。}$$

帯状荷重，長方形荷重，円荷重

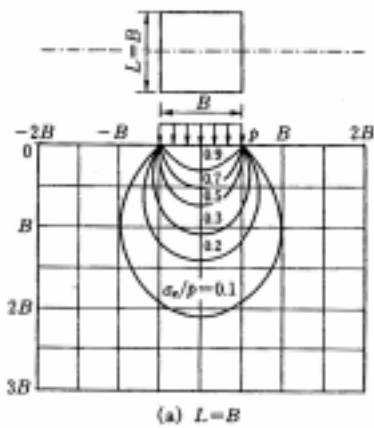
$\sigma_z = I_\sigma \cdot q$ より， $\frac{\sigma_z}{q} = I_\sigma = k$ (一定) を図示したもの。



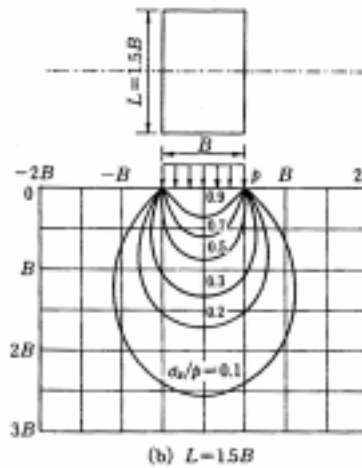
点荷重の圧力球根



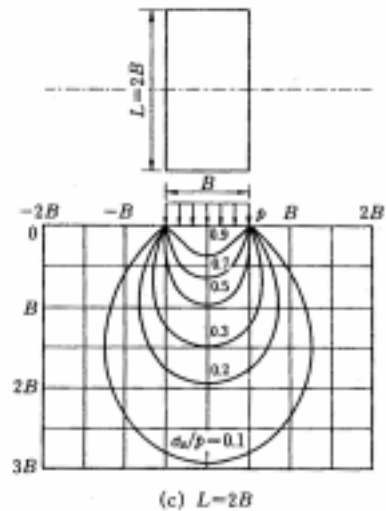
線荷重の圧力球根



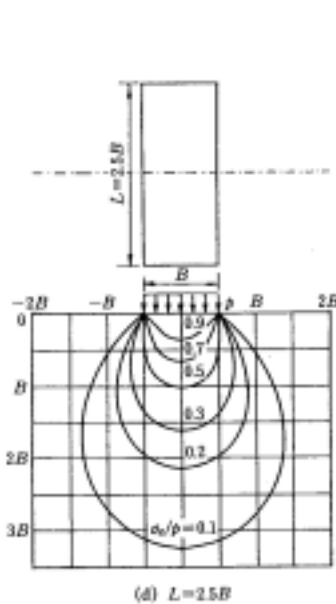
(a) L=B



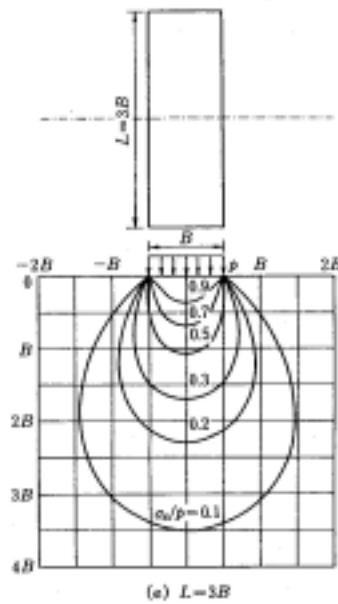
(b) L=1.5B



(c) L=2B

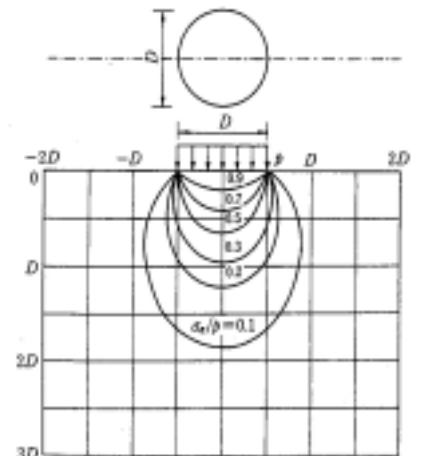


(d) L=2.5B



(e) L=3B

長方形荷重の圧力球根



円形荷重の圧力球根

以上の圧力球根の図は，松岡元著「土質力学」森北出版，より引用させて頂きました。