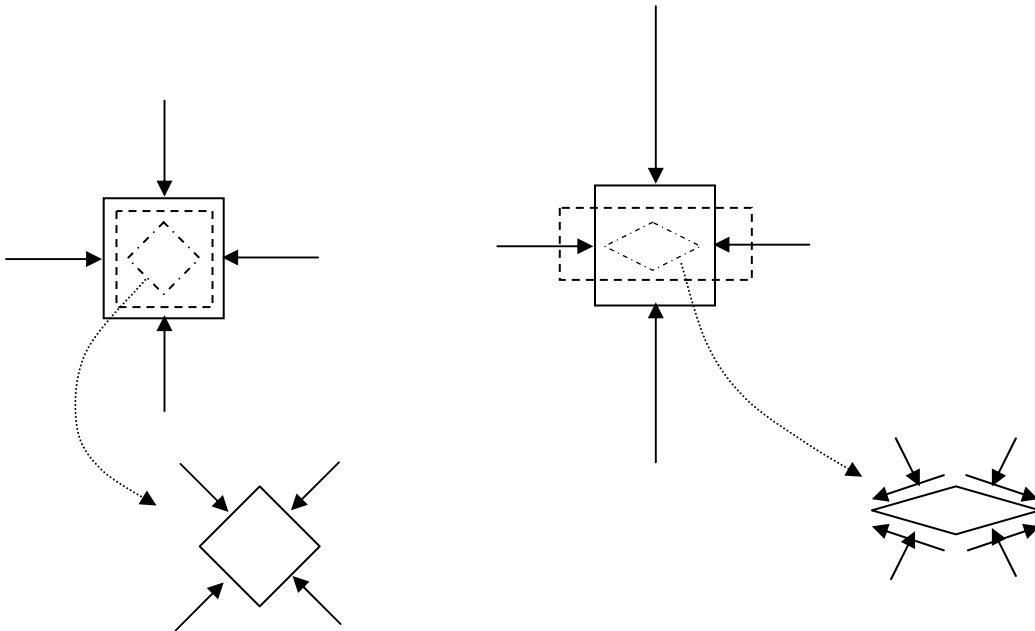


【多次元場での応力の表現】

(1)せん断力

圧密理論では、1次元しか考えていなかったため、応力の成分は $\sigma$ だけで十分であった。しかし、土の強度と破壊を考える場合には、どうしても多次元での応力を導入する必要がある。物体が壊れるためには、必ず「ずらす、あるいは、ゆがめる」力(せん断力と呼ぶ)が働かなければならないが、その「せん断力」は、多次元場においてそれぞれ別方向から加わる力に差があることから生じているからである。例えば、下図のように、仮想的な小正方形要素に、鉛直と水平方向の力が働いている場合、両者が同じ大きさの力なら、等方的に圧縮するのみで、物体は決して壊れない。しかし、両者に差がある場合には、物体のある面には「ずらす、あるいは、ゆがめる」ような働きをするせん断力が働く。鉛直と水平方向の力の差があるレベルに達すると物体は破壊する。



(2)応力ベクトルとその成分

応力とは単位面積あたりの力であるという説明があるが、それは応力の次元のことを言っているだけである。外力が作用しているある物体の微小要素を取り出してきて、その微小要素を2つに切断して、その切り口の $n$ 面に着目する。その $n$ 面には $\mathbf{T}^{(n)}$ という単位面積あたりの力が働いている。

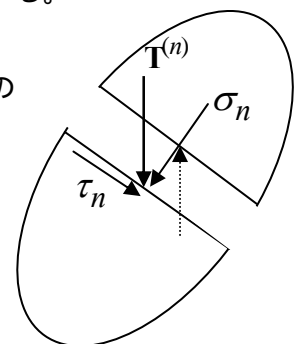
この $\mathbf{T}^{(n)}$ を応力ベクトルと呼ぶ。ベクトル量なので向きと大きさが決まっている。この応力ベクトル $\mathbf{T}^{(n)}$ は、通常、切り口の面に垂直な成分と切り口に沿った成分の2つ(3次元なら切り口に沿った成分が2つで合計3つ)で表される。

$$\mathbf{T}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_n \end{Bmatrix} \quad \sigma_n \text{ を垂直応力と呼び, } \tau_n \text{ をせん断応力と呼ぶ。}$$

これらは応力ベクトルの単なる成分であるので、スカラー量であるが、大抵の教科書では、図のように応力成分を表すにも矢印を用いて、便宜的にベクトルのように表している場合が多い。しかし本来は、基底ベクトル $\mathbf{e}_{n1}, \mathbf{e}_{n2}$ を用いて、

$$\mathbf{T}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{e}_{n1} + \tau_n \mathbf{e}_{n2}$$

と書くべきであり、ベクトル量はあくまで $\sigma_n \mathbf{e}_{n1}, \tau_n \mathbf{e}_{n2}$ であることを理解しておく必要がある。



### (3) 応力を表す座標系と応力テンソル

2次元の物体内のある点での応力状態を表すとき、適当に定めた  $x, y$  座標を用いると、 $x$  軸と  $y$  軸それぞれに垂直な切り口での2つの応力ベクトルを用いる。これを表すのに便宜上、右図が使われる。ほとんどの場合、応力ベクトルは省略されて、応力ベクトルの成分のみが描かれていることが多い。

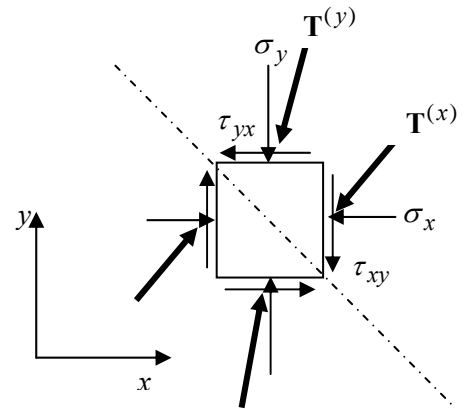
$$\mathbf{T}^{(x)} = \sigma_x \mathbf{e}_x + \tau_{xy} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{T}^{(y)} = \tau_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y$$

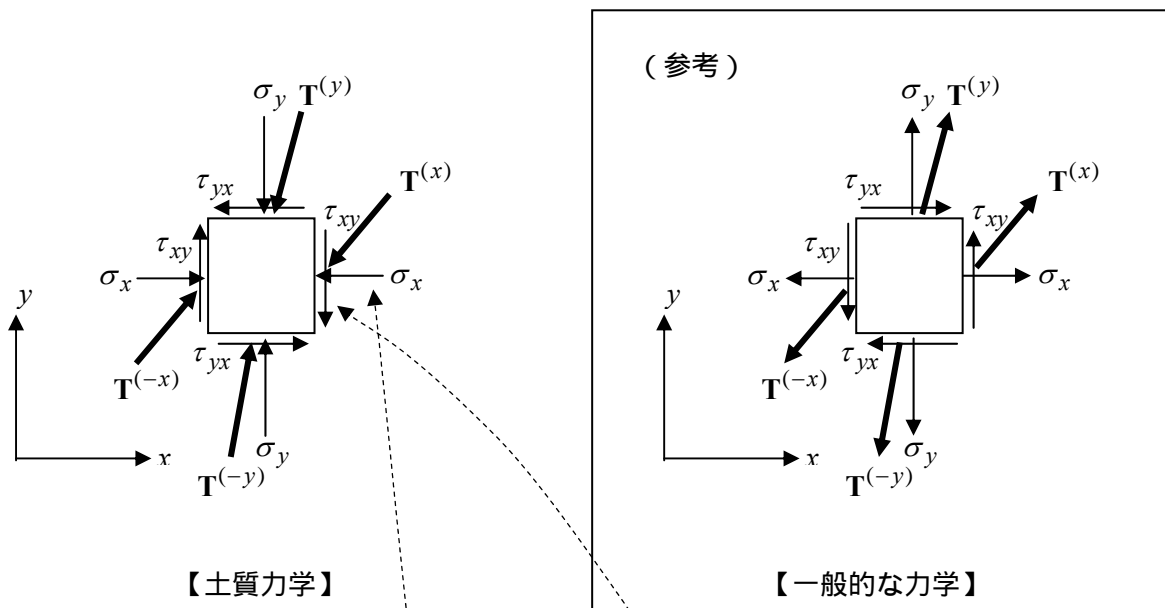
便宜上  $\begin{Bmatrix} \mathbf{T}^{(x)} \\ \mathbf{T}^{(y)} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix}$  のように演算

を表すことができるが、上の  $\boldsymbol{\sigma}$  を応力テンソルと呼ぶ。

（テンソルとは、行列で表されることからわかるように、一次変換の線形作用素であり、「ベクトルを掛けて、別のベクトルをつくる」作用をする。したがって、ベクトルを掛けてみて、はじめて物理的な意味がわかるものである。）



### (4) 土質力学での座標系の定義



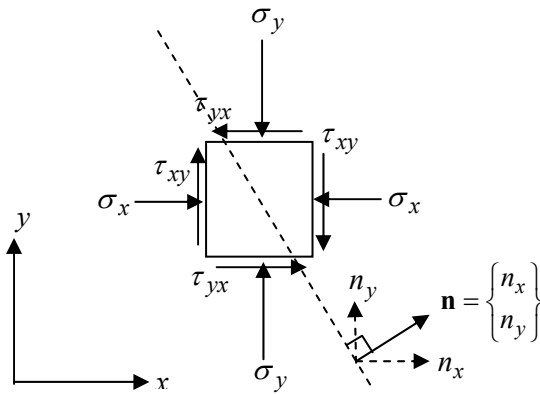
一般的な力学では、応力ベクトルは引っ張りを正にするのが普通である。しかし、引張力がほとんど期待できない「つぶつぶ」で構成されている材料（粒状体という）である土を扱う土質力学では、考慮すべき力（応力）のほとんどが圧縮であるので、垂直応力の向き（正確に言えば、応力ベクトルの垂直成分の向き）は圧縮が正となるようにするのが通例である。せん断応力の向きは、「垂直応力の符号に合わせる」ように決める。すなわち、垂直応力が  $x$  軸のマイナスの向きなら、その面に作用するせん断応力も  $y$  軸のマイナスの向きにする。

ここで、一般的な力学における応力の向きを見ると、すべての向きが逆になっているだけであり、そのため、以後の議論のほとんどは共通してできる。

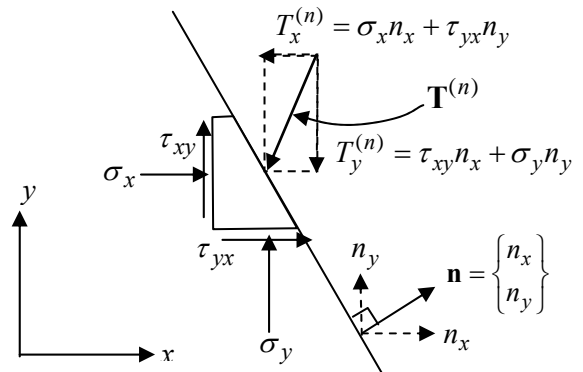
(5)コーシーの公式（応力テンソルから任意の面に作用する応力ベクトルを計算する式）

$$\mathbf{T}^{(n)} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} \mathbf{n}$$

応力テンソルに任意の面の法線ベクトルを掛けると、その面に作用する 応力ベクトルが得られる。

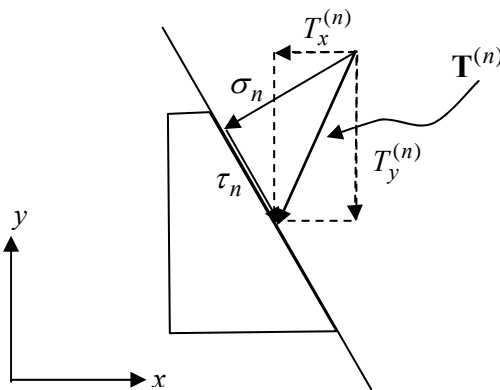


設定した  $xy$  座標系ですべての垂直応力とせん断応力の成分が表される。



コーシーの公式で求められる応力ベクトルも元々設定した  $xy$  座標系の成分で表される。

ただし、上図のように、応力ベクトルは設定した  $xy$  座標系における  $x$  成分と  $y$  成分で表されるだけなので、応力ベクトルの作用面に対する垂直成分（垂直応力） $\sigma_n$ と平行成分（せん断応力） $\tau_n$ の大きさを知りたい場合\* には、別途、座標変換等の計算をする必要がある。



応力ベクトルを  $xy$  座標系で表すのも大切だが、面に対しての垂直成分と平行成分の大きさを知ることがもっと重要である。

\*なぜ、垂直応力とせん断応力の大きさをそんなに知りたがるのにはワケがあるが、そのワケは後でわかる（はず）。

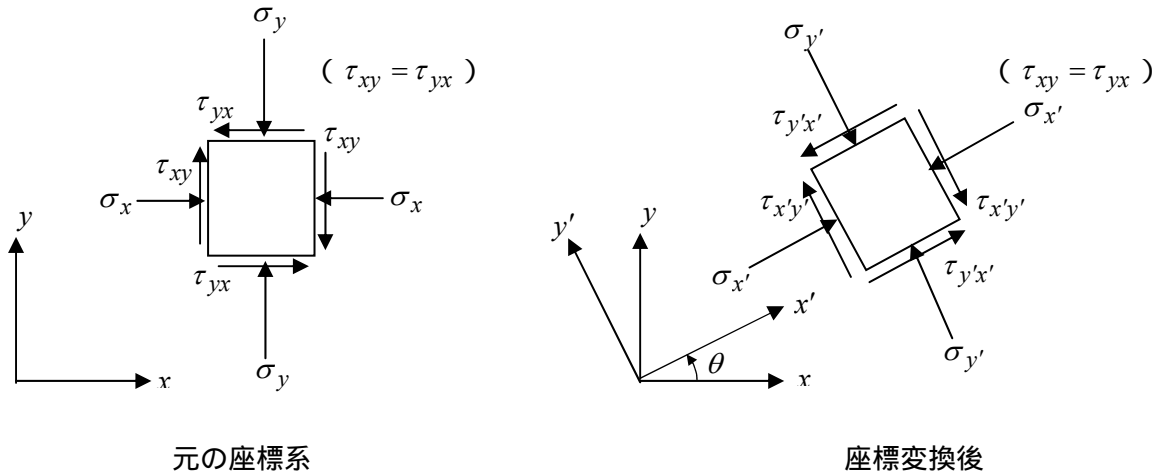
応力ベクトルに、 $xy$  座標の基底ベクトル  $\mathbf{e}_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  をそれぞれ作用させると、

$$\mathbf{T}^{(x)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(y)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \quad (1)$$

となり、 $x$  面（ $x$  軸に垂直な面）と  $y$  面（ $y$  軸に垂直な面）での応力の  $x$  成分、 $y$  成分がわかる。 $x$  面においては、 $x$  成分が垂直応力であり、 $y$  成分がせん断応力であるが、 $y$  面においては、 $x$  成分がせん断応力であり、 $y$  成分が垂直応力であることに注意する。

(6)座標変換

任意の面の応力ベクトルがコーシーの公式で計算できても、それはあらかじめ決められた座標系での  $x$  成分と  $y$  成分がわかったに過ぎないので、その座標から傾いている面に作用している垂直応力とせん断応力は即座にわからない。しかし、式(1)からもわかるように、垂直応力とせん断応力を知りたいと思う面が、座標系の  $x$  方向か  $y$  方向のいずれかに一致さえしていれば、即座にその値を知ることができる。そのため、知りたい面に座標を合わせてやる。すなわち、座標変換を行う。



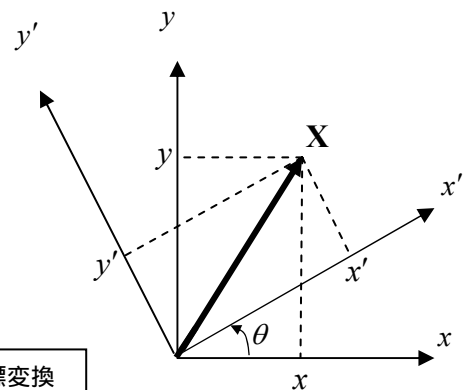
応力テンソルの座標変換について考察する。

$xy$  座標系に対し、角度  $\theta$  だけ傾いた座標系  $x'y'$  を考える。空間内にある任意のベクトル  $\mathbf{X}$  を  $xy$  座標系で表した座標が  $(x, y)$  であり、 $x'y'$  座標系で表した座標が  $(x', y')$  であったとすると、 $(x, y)$  と  $(x', y')$  の関係は、次式となる。

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2) \quad \leftarrow \text{ベクトルの座標変換}$$



上式は、 $xy$  座標系で観測していたベクトル量が、 $x'y'$  座標系ではどのように観測されるのかを表している。この見方を変える作業を座標変換と呼ぶ。特に、2次元の直交座標どうしの変換は、回転で表すことができるので、視覚的にもわかりやすい。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{とおけば、このテンソルは } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \text{ となる直交テンソルである。}$$

ここで、ある面での応力ベクトル考える。

回転前の座標系で表したものを  $\mathbf{T}^{(n)}$ 、回転後の座標系で表したものを  $\mathbf{T}^{(n')}$  とすると、

$$\mathbf{T}^{(n')} = \mathbf{Q} \mathbf{T}^{(n)} \quad (3) \quad \leftarrow \text{ベクトルの座標変換}$$

となる。

一方、それぞれの座標系を用いてコーシーの公式を表すと、

$$\mathbf{T}^{(n')} = \boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{n}' \quad \text{および} \quad \mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (4)$$

となるので、これらを式(3)に代入すると、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{n}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (5)$$

となるが、式(3)にならば、 $\mathbf{n}' = \mathbf{Q} \mathbf{n}$  であるので、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{Q} \mathbf{n} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (6)$$

となる。法線ベクトル  $\mathbf{n}$  にかかるテンソル部分を比較すると、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \quad (7)$$

となり、結果として、 $xy$  座標系で観測していた応力テンソル  $\boldsymbol{\sigma}^T$  を  $x'y'$  座標系で観測し  $\boldsymbol{\sigma}'^T$  は、

$$\boldsymbol{\sigma}'^T = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}^T \quad (8)$$

となることがわかる。応力テンソルについては、別途、 $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}'^T = \boldsymbol{\sigma}'$  (すなわち、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$ )

であることが証明できるので、上式は

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T \quad (9) \quad \leftarrow \text{テンソルの座標変換}$$

となる。(ただし、応力テンソルの対称性を用いるまでもなく、式(8)の両辺を転置すれば式(9)を得ることは自明だが、どうせ応力テンソルの対称性をこれ以降使用するのだから、先に導入しただけ)

では、実際に応力テンソルに各成分を入れて計算してみる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \sigma_x + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned}$$

整理すると、

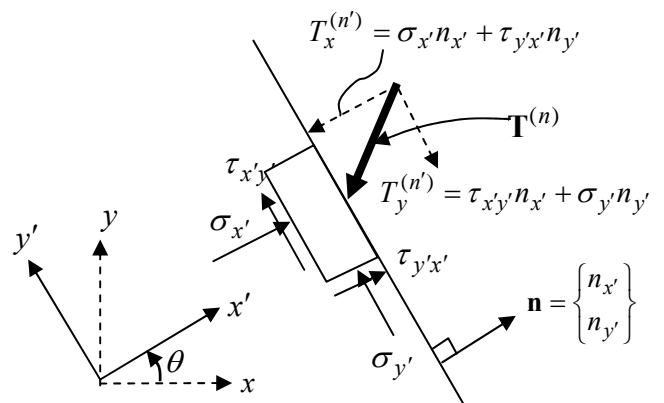
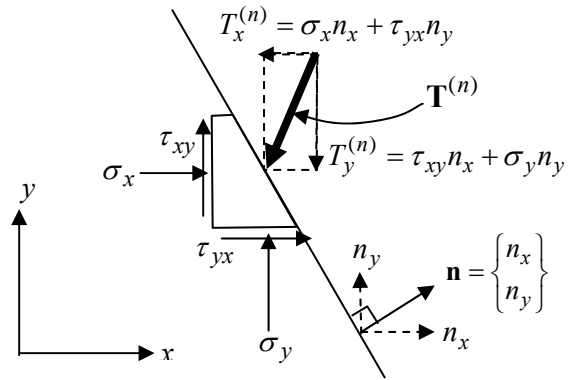
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (11)$$

同様に計算すると、

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (12)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (13)$$

となり角度  $\theta$  だけ回転した座標系で観測した応力テンソルの成分が求められる。



同じ応力ベクトルを角度  $\theta$  だけ回転した座標で観測する  
(物理的には応力ベクトルは何も変わらない)

(7)座標変換とモールの応力円

式(11)を変形すると,

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

この式の両辺を2乗すると

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta \quad (14)$$

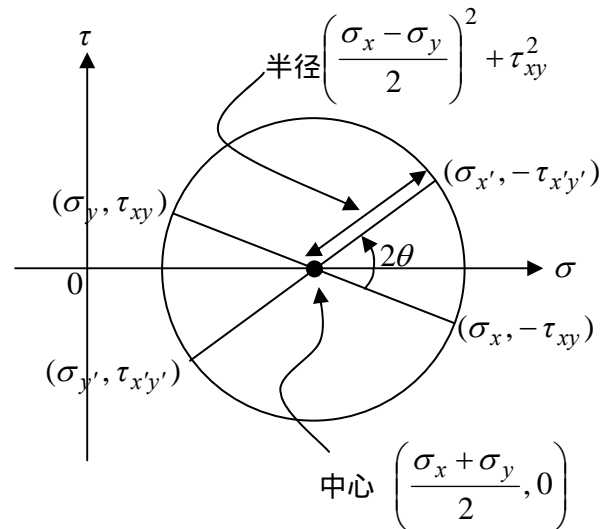
式(13)の両辺を2乗すると,

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta \quad (15)$$

式(14)と(15)を加えると,

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

結局, 座標変換前後の応力状態は, 常に右図のような円周上の点で表すことができる。円の中心と半径は, 座標変換前の応力状態から決定される。この円を, モールの応力円という。



(8)主応力と応力テンソルの固有値

物体内で応力ベクトルの作用面を回転してゆくと, ある面(とその直交する面)に作用する応力ベクトルは垂直成分しか持たず平行成分がない場合が必ず存在する。すなわち, その面にはたらくせん断応力はゼロで, 垂直応力しか働いていない。この時の垂直応力を主応力と呼ぶ。また, 主応力の働く面を主応力面と呼ぶ。ある主応力面に直交する面も必ず主応力面になっており, それぞれの面に働く主応力の大きい方を最大主応力と呼び, 小さい方を最小主応力と呼ぶ。(最大, 最小とわざわざ付けるのは, 座標変換して得られる垂直応力の中でも, それら主応力が必ず最大値および最小値になるからである。)

では, 主応力を実際に求めてみる。主応力面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすれば, その面での応力ベクトルは垂直成分しか持たないので,  $\mathbf{n}$  のスカラー倍  $\lambda \mathbf{n}$  となる。すなわち,

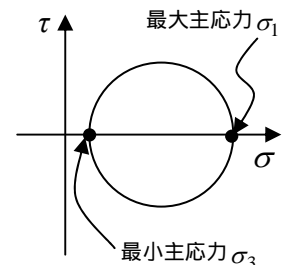
$$\mathbf{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \text{ より, } \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} - \lambda \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ よって, } (\boldsymbol{\sigma}^T - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ この式において, } \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ 以外の解を}$$

持つためには,  $|\boldsymbol{\sigma}^T - \lambda \mathbf{I}| = 0$  でなければならない。よって,

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = (\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy}^2 = 0 \text{ となり, この } \lambda \text{ に関する2次方程式を解けば,}$$

$$\lambda = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

← 言うまでもなく, モールの円の両端

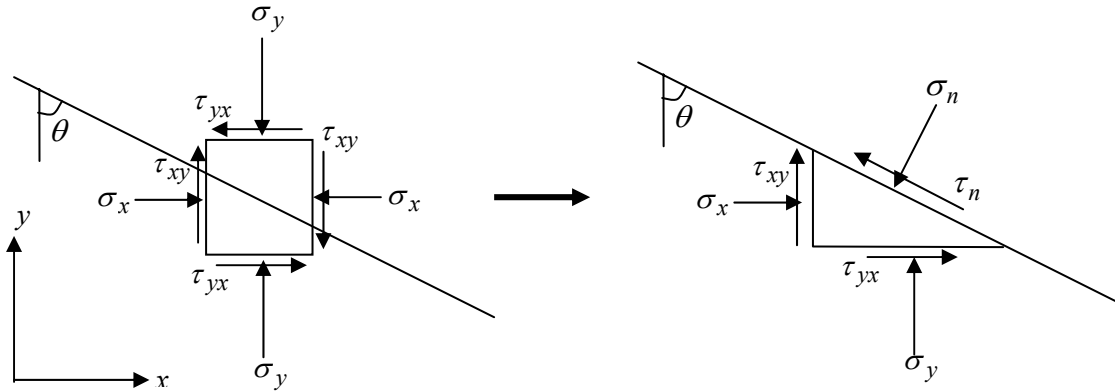


となり,  $\lambda$  の大きい方と小さい方が, それぞれ最大および最小主応力である。

以上の計算は, 結局, 応力テンソルの固有値を求めていることと同じである。

(9)力の釣り合いによる応力の座標変換の解法

この節は蛇足であると思われるが、念のため、微小土塊に働く応力ベクトルの成分から、任意の面に働く応力ベクトルの「面に垂直な成分と面に平行な成分」を幾何学的に求める方法について説明する。この方法は、いろいろな教科書で使われているが、「応力を任意の面に対して座標変換して観測する」という概念が無くて、何となくわかったような気になるため、少々危険な論法であるので注意が必要である。



微小な四角形の領域を考えた時に、設定した座標系に対して、各面に働く応力ベクトルの成分(すなわち、各垂直応力とせん断応力)が上図(左)のようになっているとする。その時、鉛直線から $\theta$ 傾いた面に働く応力ベクトルの面に対しての垂直成分と平行成分の大きさを求めたい。

そのため、上図(右)のように、角度 $\theta$ 傾いた任意の面で切断した、微小三角形領域の土塊の力の釣り合いを考える。実際は、各面に応力ベクトルが働いているが、図ではそれぞれの面での応力ベクトルの成分(垂直成分と平行成分)だけを示している。

それぞれの成分の大きさは単位面積当たりの力であるので、力の釣り合いを考えるためには、各面の面積(奥行きは長さ1としておく)をあらかじめ決めておく。

ここでは、 $\sigma_x$ が働く面の面積を $\Delta y$ とし、 $\sigma_y$ が働く面の面積を $\Delta x$ とすると、 $\sigma_n$ が働く面の面積は

$$\frac{\Delta y}{\cos \theta} \left( = \frac{\Delta x}{\sin \theta} \right) \text{となる。}$$

したがって、図より $x$ 方向の力の釣り合いは、

$$\sigma_x \cdot \Delta y + \tau_{xy} \cdot \Delta x - \sigma_n \cos \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} - \tau_n \sin \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} = 0 \quad (16)$$

同様に、 $y$ 方向の力の釣り合いは、

$$\sigma_y \cdot \Delta x + \tau_{xy} \cdot \Delta y - \sigma_n \sin \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} + \tau_n \cos \theta \cdot \frac{\Delta y}{\cos \theta} = 0 \quad (17)$$

$\Delta x / \Delta y = \tan \theta$ を用いて、式(16)と(17)を整理すると、それぞれ以下ようになる。

$$\sigma_n + \tau_n \tan \theta = \sigma_x + \tau_{xy} \tan \theta$$

$$\sigma_n \tan \theta - \tau_n = \sigma_y \tan \theta + \tau_{xy}$$

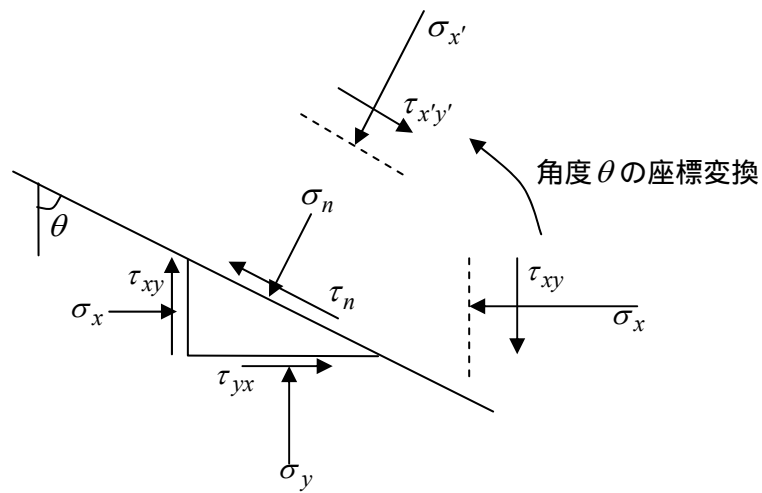
結局、 $\sigma_n$ と $\tau_n$ は、

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

となる。



これは、上のように角度 $\theta$ の座標変換で求めた $\sigma_{x'}$ と $\tau_{x'y'}$ と結果として同じになる。ただし、 $\tau_n$ は座標変

換の場合の $\tau_{x'y'}$ とは向きが逆に定義されていたので、符号は逆になっている。

このように、せん断応力の働く向きは、自分がどちらに決めたが重要なので、せん断応力を求める際には、その大きさだけでなく、向きにも常に注意しなければならない。



【モールの応力円】

(1)モールの応力円を使う上での3つの約束

垂直応力は圧縮を正とし,  $\sigma$  軸の右側を正の方向とする。

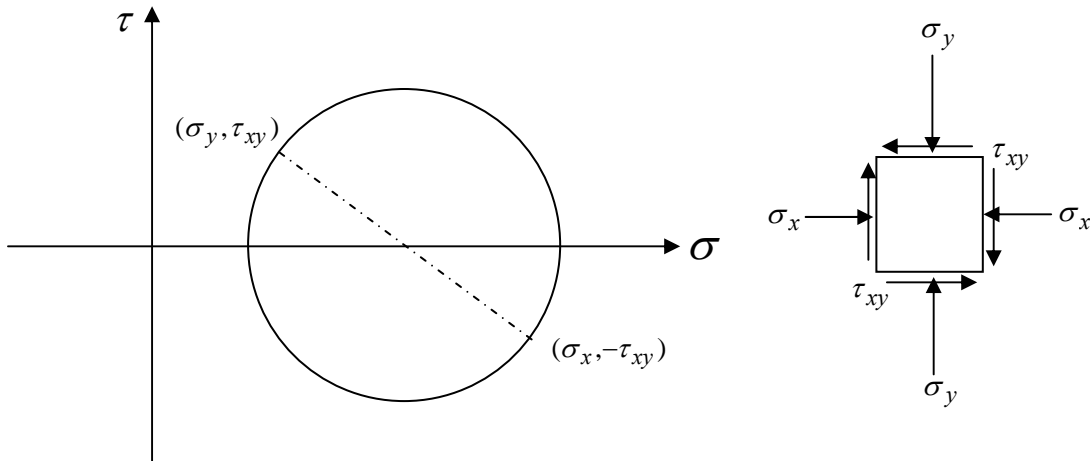
反時計まわりのモーメントを起こさせるせん断応力  $\tau$  の組を正とする。

物体内で着目する面が,  $\theta$  だけ回転すると, モールの応力円上では  $2\theta$  回転する。

と は物理的な実際の作用面とモールの応力円上との回転の方向を一致させるために都合の良い約束である。 は場合によっては, 座標変換の時に決めたせん断応力の符号とは必ずしも一致しない (むしろ逆の場合も多い) ので注意する。

はモールの応力円の誘導した過程 (座標変換の式も同様) で, 三角関数の倍角公式により, 物理的な実際の作用面での角度  $\theta$  が, 計算上は  $2\theta$  になってしまったことからわかる。

これを利用して用極法ができています。

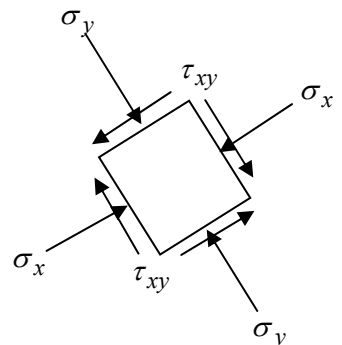


例えば, 上図は右側の応力状態 ( $\sigma_x > \sigma_y$  の場合) をモールの応力円で描いたものである。座標変換の場合に約束したせん断応力の符号の決め方では, 図の  $x$  面 ( $x$  軸に垂直な面) に作用するせん断応力は下向きが正 (図に記した方向) であるが, モールの応力円の約束ではその方向は時計回りにモーメントを発生させる向きなので負となる。したがって, モールの応力円上では,  $\sigma_x$  に対するせん断応力は  $-\tau_{xy}$  となっている。

また, モールの応力円は, ただ一組の直交する2つの面の応力状態がわかれば, そこから 180 度回転したあらゆる面に作用する応力状態がわかる。要は, 座標変換のすぐれた図式解法である。

(2)用極法

上図のモールの応力円を描いている時点では, 物理的な作用面の方向は全く関係ない。すなわち, 右のような応力状態であっても, 描かれるモールの応力円は全く変わらない。しかし, モールの応力円の図上に補助線を引いて, 極(Pole)を決めるだけで, モールの応力円の図上で, 物理的な作用面の方向の議論ができるようになる。



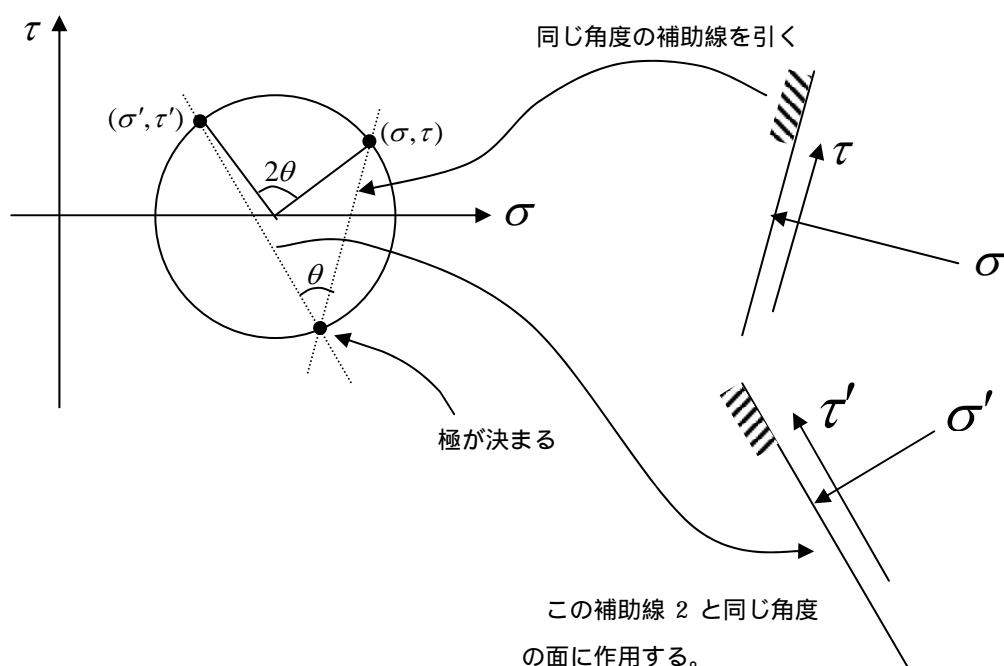
### 極の決め方

ある応力の組  $(\sigma, \tau)$  に対して、その応力が作用している面の方向に合わせてモールの応力円の図上に補助線を引く。

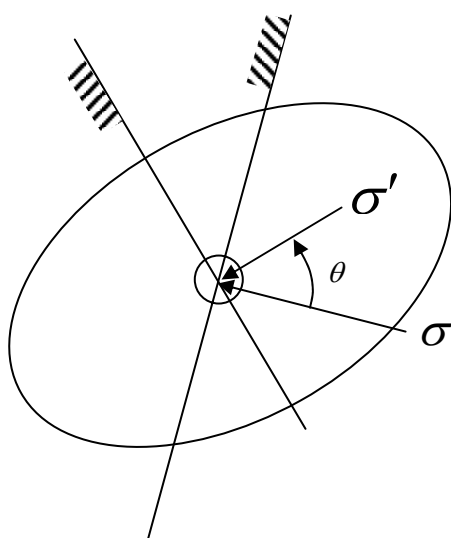
その補助線とモールの応力円上の交点を極とする。なお、補助線とモールの応力円が交差している場合（普通の場合）は、元の応力点と別の点が極となる。また、補助線とモールの応力円が接している場合は、その接点自身が極となる。

### 極の使い方

モールの応力円上のある応力点  $(\sigma', \tau')$  が作用している面の方向は、極からその応力点に引いた補助線 2 の方向である。

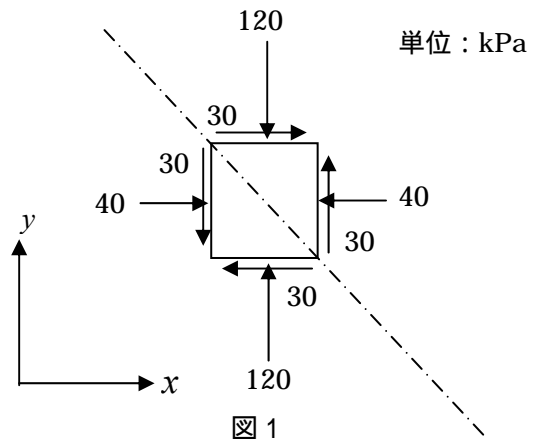


上の右の図のように描くと、 $(\sigma, \tau)$  と  $(\sigma', \tau')$  の 2 組の応力が作用している 2 つの面の関係がわかりづらいが、実は物体内の同じ位置において、応力が作用する面を回転させているだけであることに注意する。



(3) 応力の座標変換とモールの応力円の例題

**【 1 】 座標変換を用いて答えよ。**  
 図 1 のように、45 度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力を求めよ。  
 (せん断応力は、向きを図示して示しなさい)  
 最大主応力と最小主応力の大きさを  
 応力テンソルの固有値を用いて求めよ。



ポイント：座標変換の式を用いるときは、各応力の成分の符号を整理する。

**【 の解答と解説】**

図 2 の  $xy$  座標系を設定した場合、各応力の成分は、

$$\sigma_x = 40, \quad \sigma_y = 120, \quad \tau_{xy} = -30 \text{ となる。}$$

45 度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力とは、同じく図 2 のように、 $\sigma_x$  から反時計まわりに 45 度回転した

$\sigma_{x'}$  と  $\tau_{x'y'}$  である。(よって、 $\theta = +45^\circ$ )

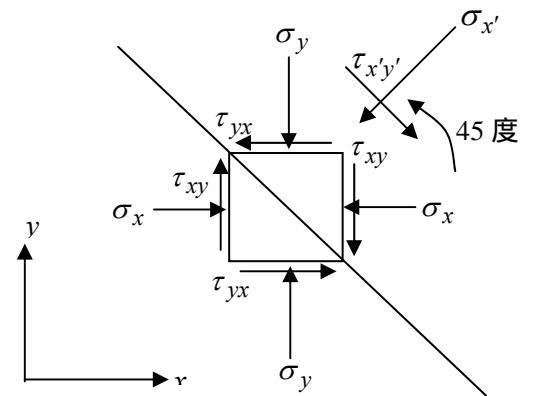


図 2

したがって、(この座標系で考えた場合の) 座標変換の式

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

にそれぞれの値を代入して、

$$\sigma_{x'} = \frac{40 + 120}{2} + \frac{40 - 120}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + (-30) \sin(2 \times 45^\circ) = 50$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{40 - 120}{2} \sin(2 \times 45^\circ) + (-30) \cos(2 \times 45^\circ) = 40$$

以上のように求められたので、垂直応力とせん断応力(特にせん断応力)の向きに注意して、図 3 のように答える。

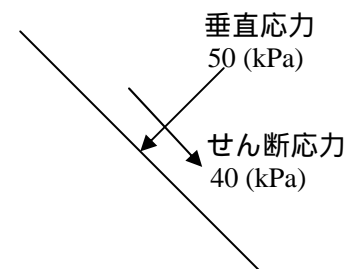


図 3

( 図 1 を見れば、横より上下に作用する応力の方が大きいので、45 度傾いた面に作用するせん断応力の向きが斜め下向きになることは直感的に考えてもわかるはず)

**【 の解答と解説】**

応力テンソルは、図 2 のような座標系を設定すれば、整理したのと同様に各成分が次式のように求められる。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -30 \\ -30 & 120 \end{pmatrix}$$

主応力：応力(ベクトル)が作用する面をいろいろ回転して見たときに、せん断応力が全く作用せず、垂直応力のみが作用する面が必ずあり、その時の垂直応力のことを主応力と言う

したがって、主応力を求めるには、応力テンソルを対角化すればよい。具体的には、固有値と固有ベクトルを求めるということだが、主応力の値だけなら、固有値を求めれば良い。よって、

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 - \lambda & -30 \\ -30 & 120 - \lambda \end{vmatrix} = (40 - \lambda)(120 - \lambda) - (-30)^2$$

$$= \lambda^2 - 160\lambda + 3900 = (\lambda - 30)(\lambda - 130) = 0 \quad \text{より,} \quad \lambda = 30, 130$$

したがって、最大主応力は 130(kPa)、最小主応力は 30(kPa)となる。

主応力と応力テンソルの固有値については、[配付資料 No.13 の\(8\)を参照](#)

【2】モールの応力円を用いて答えよ。

(用極法を用いずに解きなさい)

図1のように、45度傾いた面に作用する

垂直応力とせん断応力を求めよ。

(せん断応力は、向きを図示して示しなさい)

最大主応力の大きさと作用する面の方向を求めよ(方向は図示せよ)

### 【 の解答と解説】

最初に、図1の2組の応力の組み合わせが、モールの応力円を描く上で、どの点にプロットされるのかを、特にせん断応力の符号に注意して考える。

すなわち、垂直応力が40(kPa)作用する面のせん断応力は、図の四角形の土要素を反時計回りに回そうとする方向であるので、正となり、30(kPa)となる。したがって、図4において、垂直応力が40(kPa)作用する鉛直面における応力状態は点Aで表される。一方、それと直交する水平面には、垂直応力120(kPa)と土要素を時計回りに回転させようとするせん断応力(すなわち、図4では負)が作用するので、図1での水平面の応力状態は図4で点Bで表される。

結局、モールの応力円は、点A、点Bを結ぶ線を直径とする円となる。さて、問題の図1に示す45度傾いた面に作用する応力状態であるが、これは図2から、点Aの応力状態が45度、反時計回りに回転した場合の応力状態である。図2での物理的座標軸の回転の方向は、図4のモールの応力円の図上の回転の方向と一致するから、図4のモールの応力円では、45度の2倍の90度だけ点Aから回転した点Cの応力状態が、求めるべきものとなる。したがって、三角形の幾何学的な関係から、点Cの座標は(50, -40)となる。せん断応力は負であるので、モールの応力円の作図の約束より、土要素を時計回りに回す方向に作用することがわかる。すなわち、図示すると、図5のようになる。

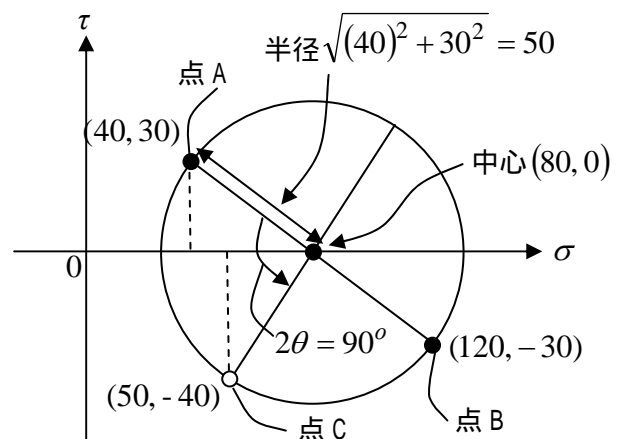


図4

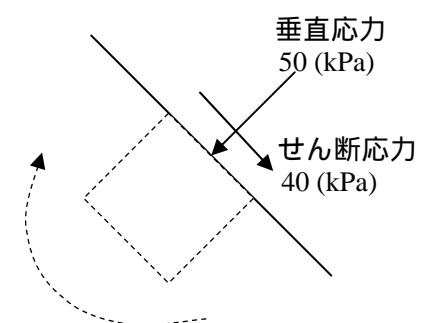


図5

【 の解答と解説】

主応力は、座標軸を回転させて応力状態を観測した時に、せん断応力がゼロとなる場合の垂直応力であるから、モールの応力円の図6上では、2つの点となる。円の半径が50であることから、最大主応力と最小主応力は、それぞれ中心の座標(80,0)から半径を足したものと引いたものとなり、

最大主応力 130(kPa)

最小主応力 30(kPa)

となる。

では、主応力が作用する面の方向であるが、

点Aの応力状態が作用する面、すなわち鉛直面を基準

に考えると、図5において、点Aから最小主応力の点まで、中心角にして反時計回りに

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right)$$

となるので、実際には

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = 18.4^\circ$$

鉛直面から反時計回りに傾いた面に最小主応力は作用することになる。

一方、最大主応力の点は、点Bから中心角にして反時計回りに $\alpha$ だけ回転した場所で表されるので、点Bの応力状態が作用する面、すなわち水平面から反時計回りに、

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) = 18.4^\circ$$

だけ傾いた面に作用することになる。図示すると、図7のようになる。

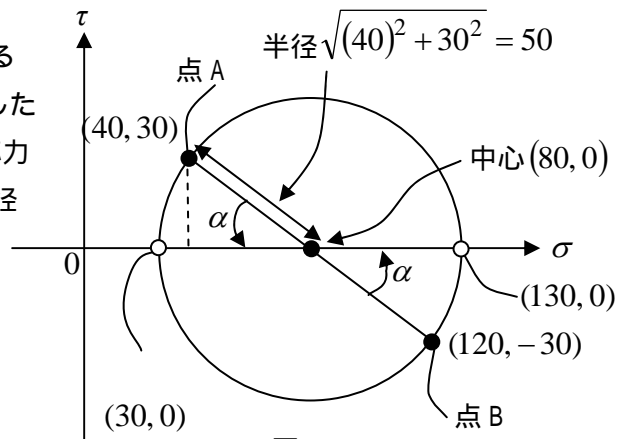


図6

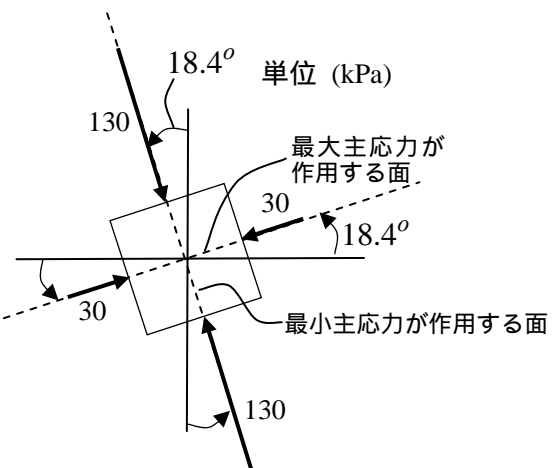


図7

注意：

図1と図7の関係はどちらの応力状態であっても、観測している座標軸が異なるために、表し方が異なるだけである。そのため、土要素がうける変形は全く同じになる。すなわち、図8のようにもともと円型の土要素に、図1のような応力状態が作用した場合と、図7のように主応力が作用した場合は、土要素の円は、斜線部の楕円のように全く同じ変形となる。(ただし、これはイメージ図) 逆に、図8の左の図を見ただけで、大体的変形のイメージ(斜線の楕円の形)が思い浮かべられれば、主応力の作用する方向を間違えることはまず無い。

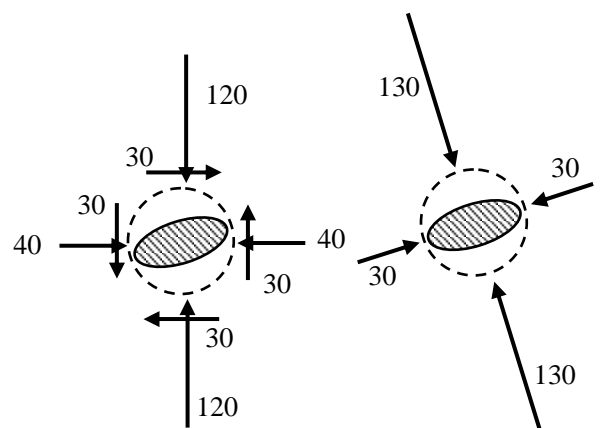


図8

【3】モールの応力円の用極法を用いて答えよ。

図のように、45度傾いた面に作用する垂直応力とせん断応力を求めよ。

(せん断応力は、向きを図示して示さない)

最大主応力の作用する面の方向を求めよ

(方向は図示せよ)

【 の解答と解説】

モールの応力円を描くまでは(2)と同じ。

極の求め方は、すでに明らかになっている応力状態を

基準にして、それらが作用している面を実際にモールの

応力円の図上に描いてしまう。ここでは、点Aと点B

の応力状態が明らかである。点Aの応力状態が作用する

面は鉛直面であるので、図9に示すように、それを図上に

描き、その面と応力円との交点を「極」と定める。(これは、点Bから、その作用面(水平面)を描いても同じ「極」を定めることができる。要するに、「極」とは、モールの応力円上ですべての作用面が交わる唯一の点である。)

極が定めれば、問題の「45度傾いた面」を実際に、極を通るように図上に描けば、その面とモールの応力が交わる極以外のもう一つの点、その面に作用する応力状態を表す点となる。

したがって、C点がその求める点となる。

実は、点Cの具体的な座標値を図9から求めるのは若干面倒くさいが、幾何学的な関係だけから、

$(\sigma, \tau) = (50, -40)$ と求めることができる。したがって、答えは図5と全く同様となる。

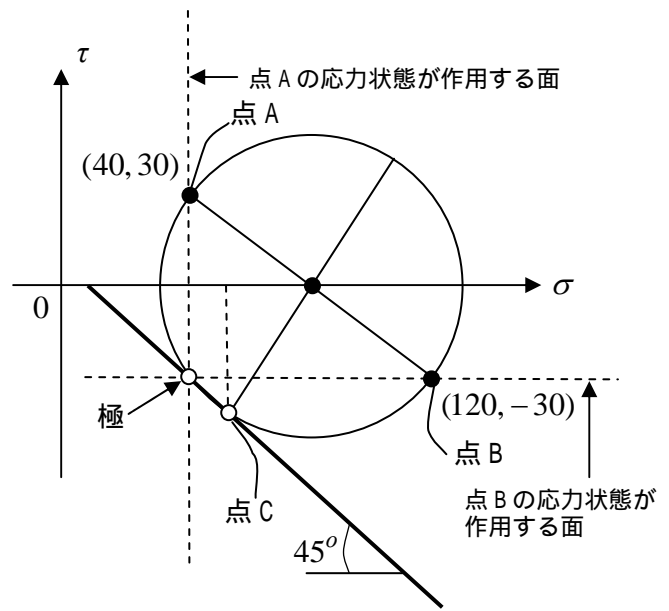


図9

【 の解答と解説】

すでに極が求められているので、最大主応力の作用する面を示すのは、非常に簡単であり、

図10に示すように、極から最大主応力

を示す点を結んだ線が最大主応力が作用する面

となる。また、最小主応力が作用する面も同様に、極から最小主応力

を示す点に線を引くだけである。

具体的な角度は、幾何学的な関係より、

具体的な角度は、幾何学的な関係より、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{90}\right) = 18.4^\circ$$

となり、最大主応力が作用する面は、水平面

から18.4度反時計回りに傾いた面であることがわかる。一方、最小主応力が作用する面は鉛直面から反

時計回りに18.4度だけ傾いた面であることがわかる。(図7も参照のこと)

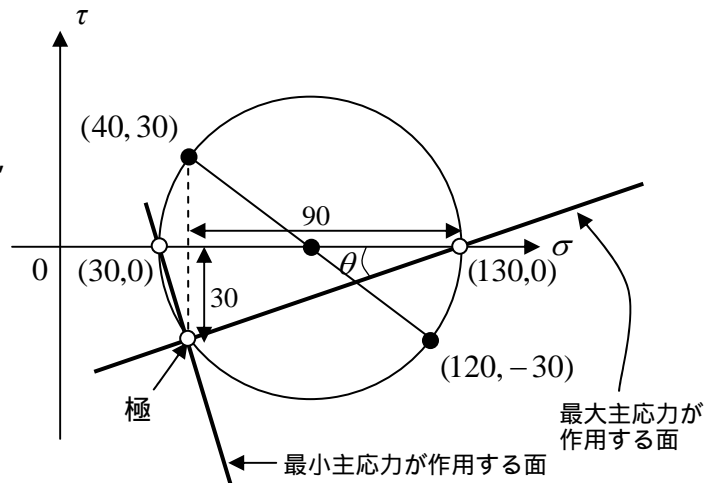


図10

まとめ：当然のことながら、どの解法でも同じ結果を得ることが出来るが、それぞれに特長がある。例えば、用極法は非常に優れた図式解法であり、応力の作用面の方向が一目瞭然でわかるが、モールの応力円上の具体的な座標値や、傾きの角度を計算するのは若干面倒くさいこともある。数字をズバリ出すなら、座標変換の式を用いた方が正確で早いことも多い。これらの特長を抑えて、自在に使い分けることができれば理想的である。

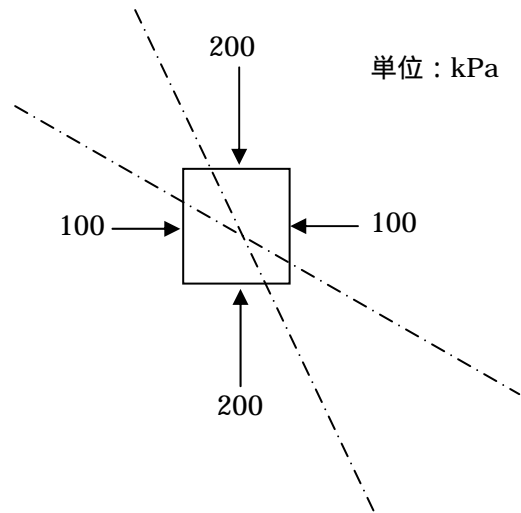
【4】

右の図の応力状態があったとする。  
 図のように30度と60度傾いた面に働く、  
 垂直応力とせん断応力の大きさと向きを  
 下記の方法で求めよ。

座標変換を用いる

モールの応力円（用極法なし）を用いる

モールの応力円（用極法）を用いる



【解答と解説】

ポイント：主応力が与えられている時の問題

座標変換

求める面は、最小主応力が作用する鉛直面からそれぞれ30度と60度傾いているので、

30度の面：

$$\sigma = \frac{100+200}{2} + \frac{100-200}{2} \cos 60^\circ = 150 - 25 = 125$$

$$\tau = -\frac{100-200}{2} \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}$$

60度の面：

$$\sigma = \frac{100+200}{2} + \frac{100-200}{2} \cos 120^\circ = 150 + 25 = 175$$

$$\tau = -\frac{100-200}{2} \sin 120^\circ = 25\sqrt{3}$$

となり、せん断応力の向きは、座標軸の定義より  
 それぞれ図11のようになる。

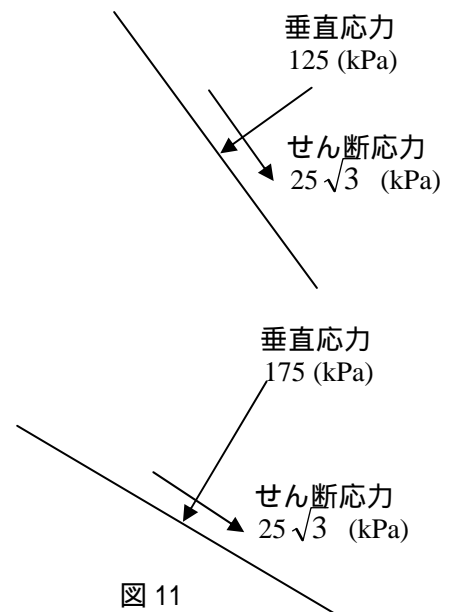


図 11

モールの応力円（用極法なし）

モールの応力円は、図12のようになる

求める面は、最小主応力が作用する鉛直面からそれぞれ30度と60度反時計回りに傾いているので、モールの応力円上では最小主応力を示す点から、60度と120度同じく反時計回りに回転した点が、それぞれの面に作用する応力状態を示すことになる。

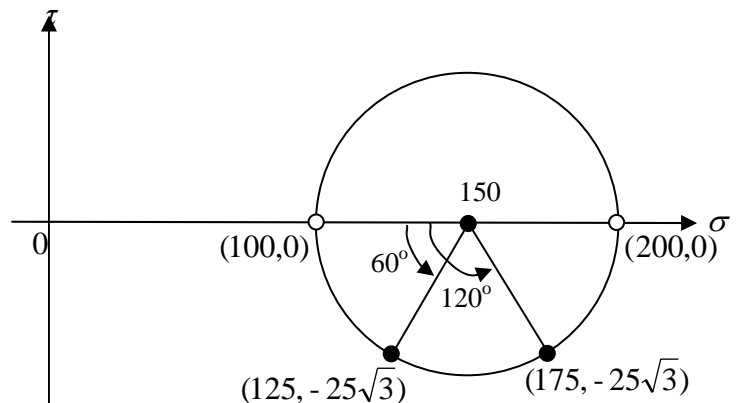


図 12

結局，図 12 の幾何学的な関係から，

30 度の面： $(\sigma, \tau) = (125, -25\sqrt{3})$

60 度の面： $(\sigma, \tau) = (175, -25\sqrt{3})$

となり，モールの応力円上の座標でせん断応力が負になる場合は，時計回りに土要素を回転させるようなせん断応力の向きとなるので，結果は，前ページ図 11 と同様になる。

モールの応力円（用極法）

主応力が与えられている場合のモールの応力円において極を定める。

図 13 に示すように，最小主応力を示す点から，最小主応力が作用する面（ここでは鉛直面）を描くと，それは応力円の接線となってしまう。したがって，極は最小主応力を示す点そのものである。最大主応力を示す点から，その作用面（ここでは水平面）を描けば，やはり極は最小主応力を示す点であることが示される。

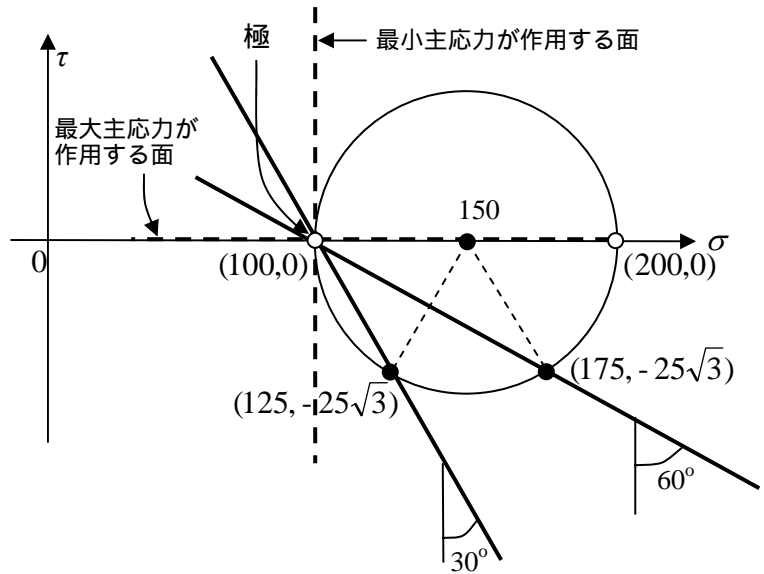


図 13

この極を通り，鉛直面からそれぞれ 30 度と 60 度反時計回りに傾いた面を描き，それらとモールの応力円との交点が，それぞれの面に作用する応力状態を示すことになる。

したがって，図 13 の幾何学的な関係を用いて，

30 度の面： $(\sigma, \tau) = (125, -25\sqrt{3})$

60 度の面： $(\sigma, \tau) = (175, -25\sqrt{3})$

であることがわかる。結果として， と同様に前ページ図 11 と同様の結果を得る。



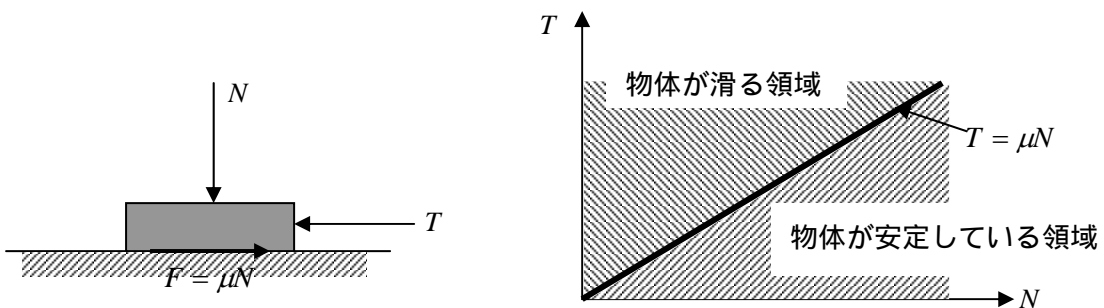
【土の破壊基準 (垂直応力とせん断応力の重要性)】

応力の座標変換を説明した時に、応力ベクトルは作用している面に対して垂直成分 (垂直応力) と平行成分 (せん断応力) を知ることが重要であると述べた。なぜ、それが重要なのかを土の破壊特性と関連づけて説明する。

(1) 摩擦性材料としての土

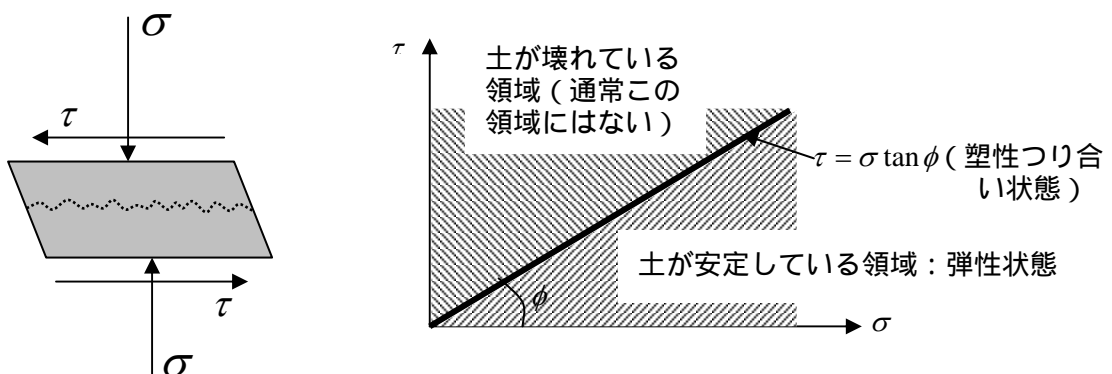
復習：摩擦力

摩擦力  $F$  は、垂直抗力  $N$  に比例して大きくなる。摩擦係数  $\mu$  を用いれば  $F = \mu N$  と表される。下図のように摩擦のある水平な台の上に、物体が置いてあり、その物体を上から  $N$  の力で押しつけているとする。今、横から  $T$  という水平力を与えてこの物体を滑らそうとするとき、 $T \geq F$  となったときに、物体は台上をすべり始める。すなわち、右のグラフ上で考えると、摩擦力を表す直線の下側では物体は安定しており、上側では物体は滑ることになる。



以上の摩擦力の概念を、土に当てはめてみる。

垂直応力  $\sigma$  だけを考えれば、 $\sigma$  をいくら大きくしても土は通常は壊れることはないが、せん断応力  $\tau$  が加わることによって、土はせん断変形し始める。土にも「摩擦則」が成立し、垂直応力  $\sigma$  に比例したせん断抵抗力  $r$  が発揮される。物体の外部から加わる外力の状態により、物体内部に発生するせん断応力  $\tau$  が、このせん断抵抗力  $r$  と同じ大きさに達すると、せん断変形は急激に大きくなり、やがて下図のように土は破壊する。破壊が目に見えて観察できる場合の典型例は、図のように不連続面が発生する場合であり、この不連続面のことを「すべり面」と呼ぶ。



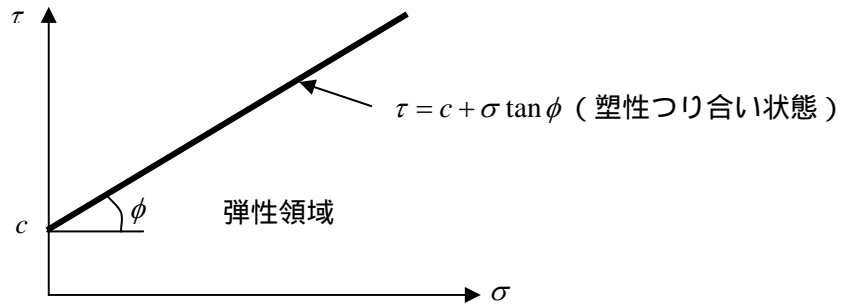
土の摩擦則では、比例定数である摩擦係数は用いず、せん断抵抗角 (内部摩擦角)  $\phi$  を用いて表す。

## (2) クーロン (Coulomb) の破壊基準

クーロンは土の垂直応力とせん断応力には右図のような関係が成り立つと仮定した。

$\tau < c + \sigma \tan \phi$  の領域：土は弾性領域（可逆的な変形をする領域）にあり、変形は小さい。

$\tau = c + \sigma \tan \phi$  の状態：土は塑性つり合い状態（非可逆的な変形をする状態）になり、大きな変形をしてやがて壊れる。



粘着力  $c$ ：粒状体である土は、つぶつぶ同士を拘束する圧力（拘束圧）がなければバラバラになってしまう。そのため、(1)の図で示したように  $\sigma$  がゼロならば  $\tau$  もゼロとなる。しかし、実際の土は、場合によっては拘束圧がゼロの状態でも幾分かのせん断抵抗応力を持つ。これを粘着力  $c$  呼ぶ。呼び名は「粘着力」だが、次元（単位）は応力なので注意する。

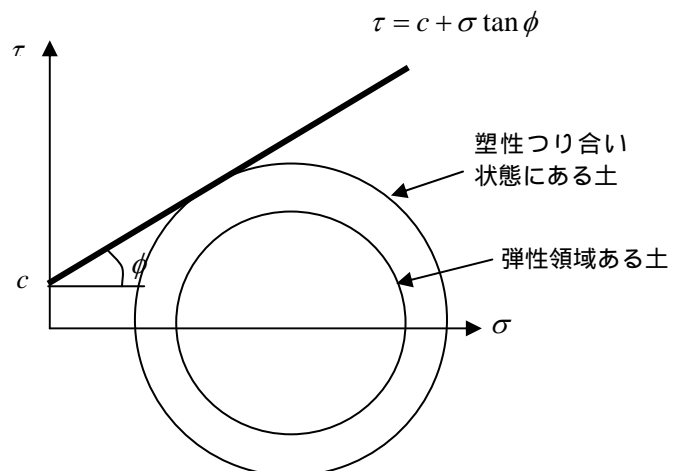
粘着力の原因：粘性土の場合には、化学的な作用によりセメンテーションが発達して、土粒子同士がくっつき粘着力が発生する。過圧密粘土の場合にも粘着力が発揮される（理由はあとで）。砂の場合、密詰め砂では砂粒子間の結合力が大きいため粘着力が発揮される（これは、過圧密粘土が粘着力を発揮するのと同じ理由）。また、砂や粘土に限らず、不飽和土の場合には、サクシジョンの作用により粘着力が発生する。

せん断抵抗角（内部摩擦角） $\phi$ ：垂直応力が増えればせん断応力も大きくなるという「摩擦モデル」は、砂の場合では粒径の大きいザラザラの砂粒を想像すれば比較的イメージしやすい。しかし、非常に土粒子が小さい粘土でも、「摩擦モデル」を同じようにイメージできるだろうか？

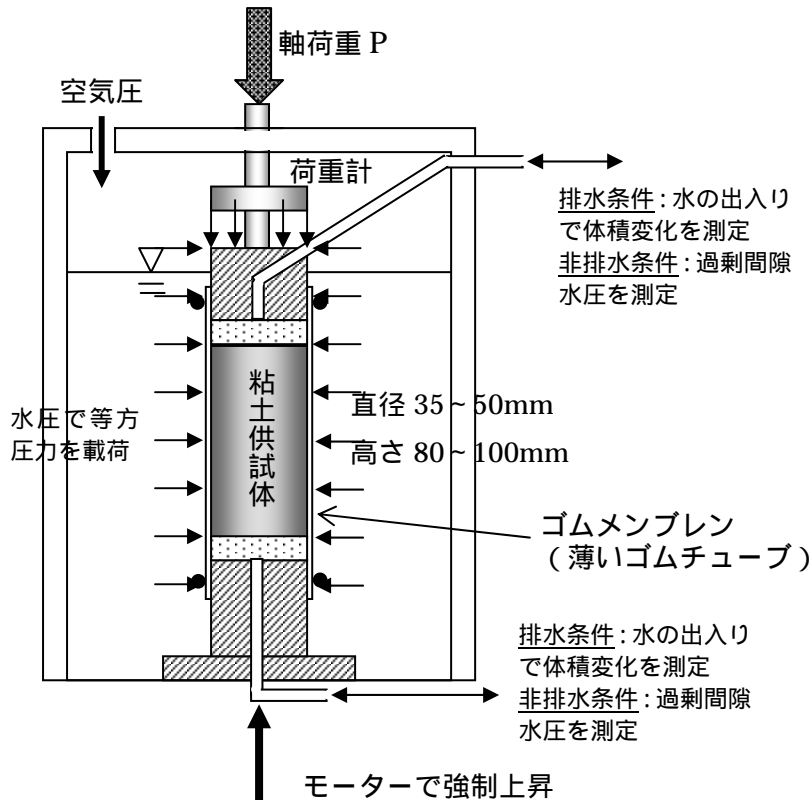
実は、粘土の場合には、同じように摩擦則が成り立っていても、砂とはかなり異なるメカニズムでせん断応力が増加している。粘土は、垂直応力が加えられると圧密して間隙比が小さくなる。そのため、垂直応力が大きいほど、間隙比は小さくなり、せん断抵抗力（せん断強度）は大きくなっていく。粘土の「せん断強度」は間隙比と1対1の関係にある（非常に重要）。したがって、粘土の場合、クーロンの破壊基準は1本の直線で表されているが、その線上のひとつひとつの点は、実は間隙比の異なる粘土のそれぞれのせん断強度がプロットされていることになる。

## (3) モールの応力円と破壊基準の関係

モールの応力円は物体内のあらゆる作用面にたいする応力状態（垂直応力とせん断応力の組合せ）をプロットしたものであった。したがって、図の外側の円のように、モールの応力円が破壊基準の直線に接していたら、その時点でその接点の応力状態は破壊状態（塑性つり合い状態）にあることにある。別の作用面での応力状態が、破壊基準の直線よりも下回っていても、作用面を回転させて見ると、実は破壊基準に達していると言う場合が生じる。図の内側の円のように、モールの応力円を描いてみて、破壊基準に接しなければ、あらゆる作用面に対してその土は弾性領域にあることを示している。



【土のせん断強度を測定する試験(2):三軸圧縮試験】



三軸圧縮試験の種類 (3種類)

	等方圧力による 圧密過程	軸圧縮による せん断過程
UU 試験	非圧密	非排水せん断
CU 試験	圧密	非排水せん断試験
CD 試験	圧密	排水せん断

(注: 読むときは, 「非圧密非排水せん断試験」というようにつなげて読む)

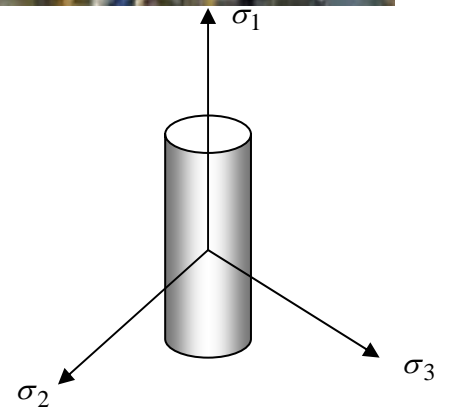
試験方法:

CU, CD 試験の場合: 供試体を取りまく水による水圧で等方的な圧力を载荷する。粘土の場合は十分圧密が終了してからに進む。砂の場合は, 瞬時に圧密は終わるので, すぐに進める。  
(圧密終了した時点で, 等方的に载荷した圧力はすべて有効応力になっていることから, この圧力を有効拘束圧と呼ぶ)

UU 試験の場合: 非排水条件のまま, 供試体を取りまく水による水圧で等方的な圧力を载荷する。

等方圧力を载荷したまま, 三軸セルの下側から一定の速度で台全体を上昇させて, 円柱型の供試体を軸圧縮させる (鉛直変位 2cm 程度まで)。

軸変位から軸ひずみを計算し, 軸荷重から軸差応力を計算し, 軸差応力と軸ひずみの関係 (応力~ひずみ関係) をグラフに描く。



三軸圧縮試験では,  $\sigma_1$  (最大主応力) と  $\sigma_2 = \sigma_3$  (最小主応力) を载荷する。

排水条件 (CD 試験) の場合は, 排水量から体積ひずみ (= 排水した間隙水の体積 / 初期の供試体体積) を計算し, 体積ひずみと軸ひずみの関係をグラフに描く。

非排水条件 (CU 試験) の場合は, 過剰間隙水圧と軸ひずみの関係をグラフに描く。

何種類か側方圧力を変えて, ~ の実験を行う。

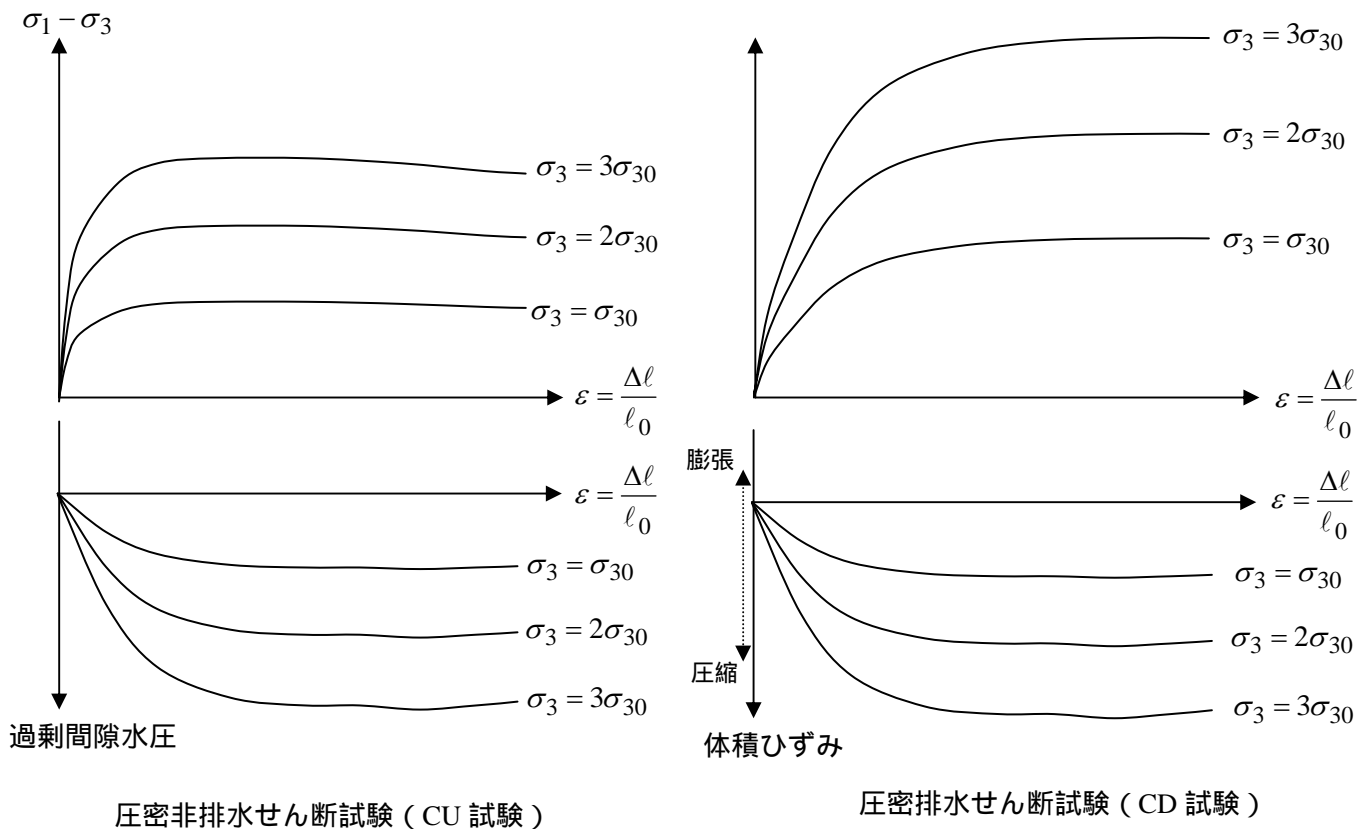
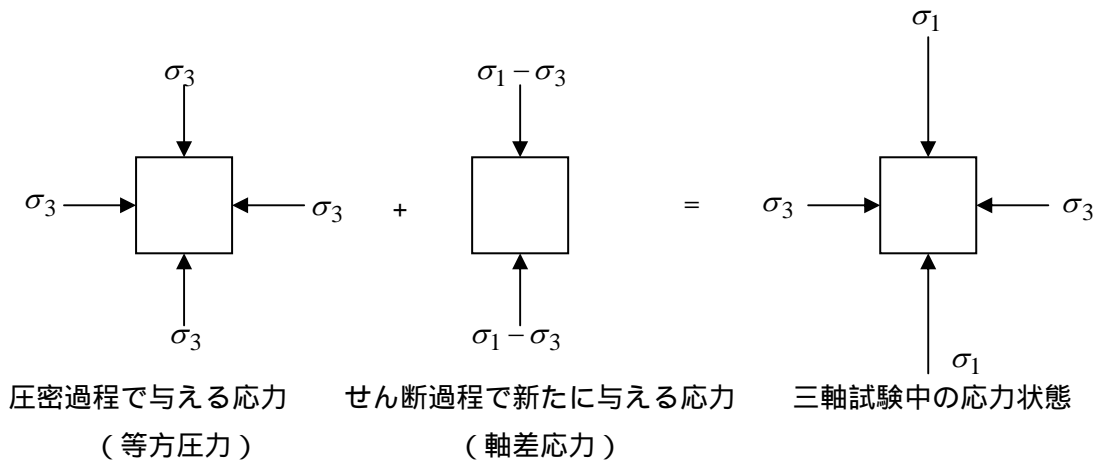
それぞれの実験の等方応力 (最小主応力) と軸差応力 (最大主応力と最小主応力の差) から求められる最大主応力を用いて, モールの応力円を描く。

粘着力  $c$  とせん断抵抗角 (内部摩擦角)  $\phi$  を求める。

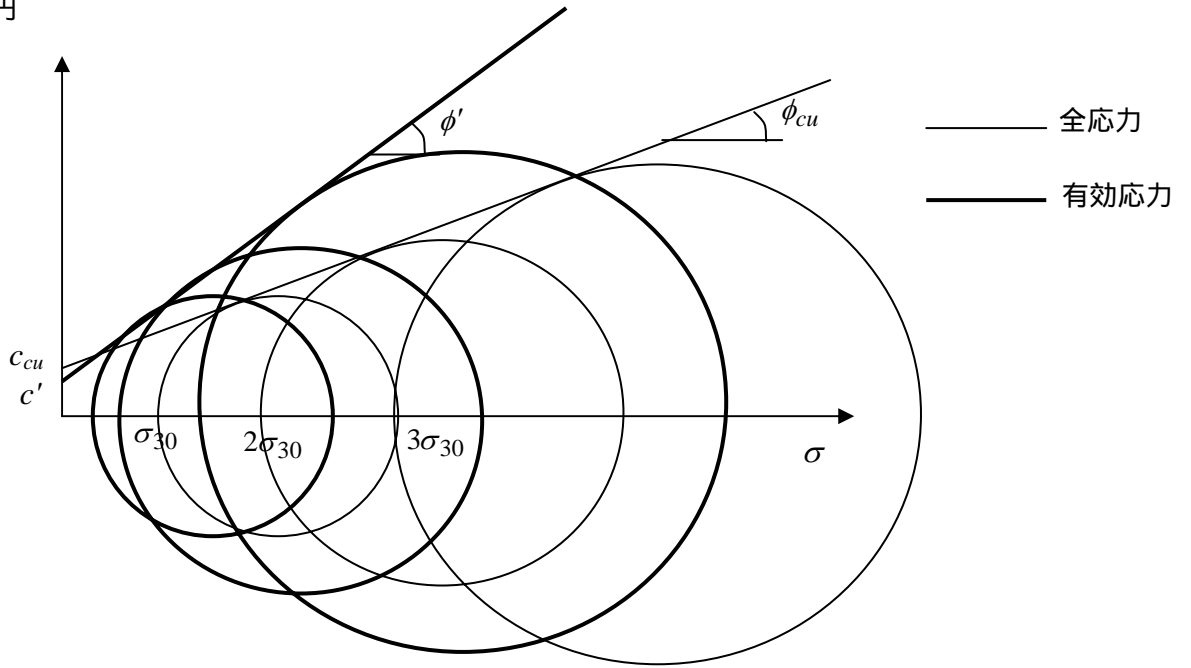
実際現象は, 圧密とせん断が別々に発生するようなことはないが, 実験室では圧密とせん断を分けることができる。ここでいう圧密とせん断とは,

圧密: 等方的な圧力, あるいは 1 次元応力のように, 土に圧縮変形を与え, 体積変化を起こさせる現象で, 破壊には直接関係しない。

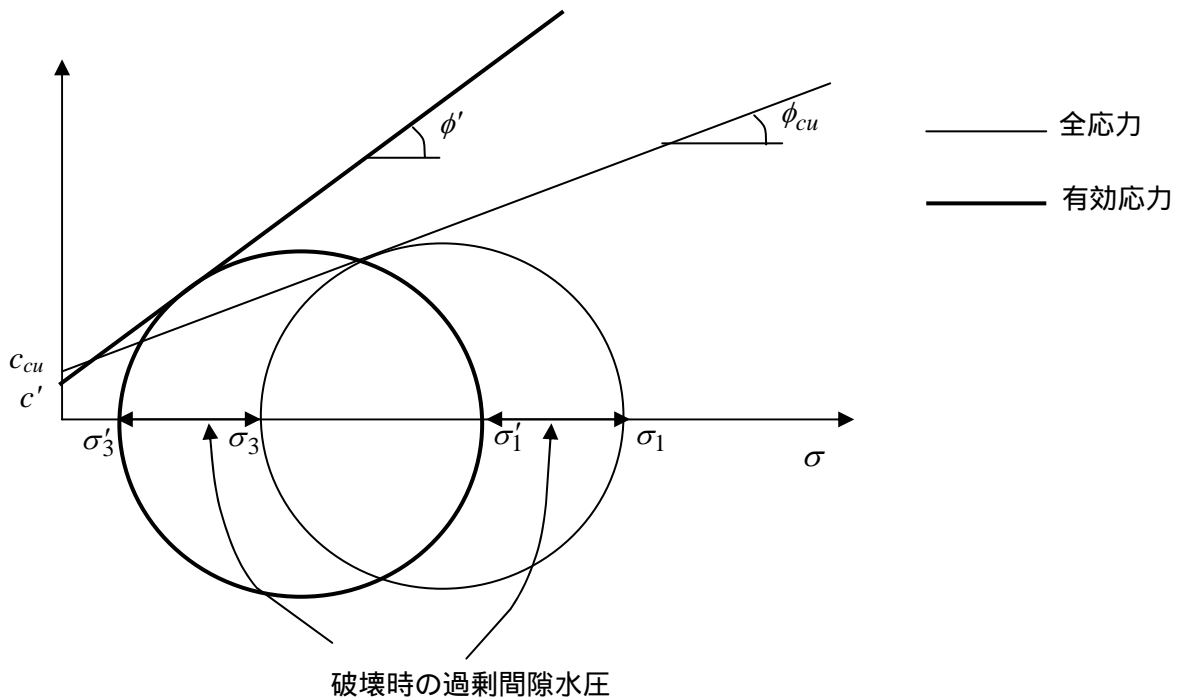
せん断: 軸差応力 (縦軸と横軸の応力に差がある状態) を与えることにより, せん断応力を発生させることによって, 土にせん断変形を与え, やがて土を破壊させる現象。



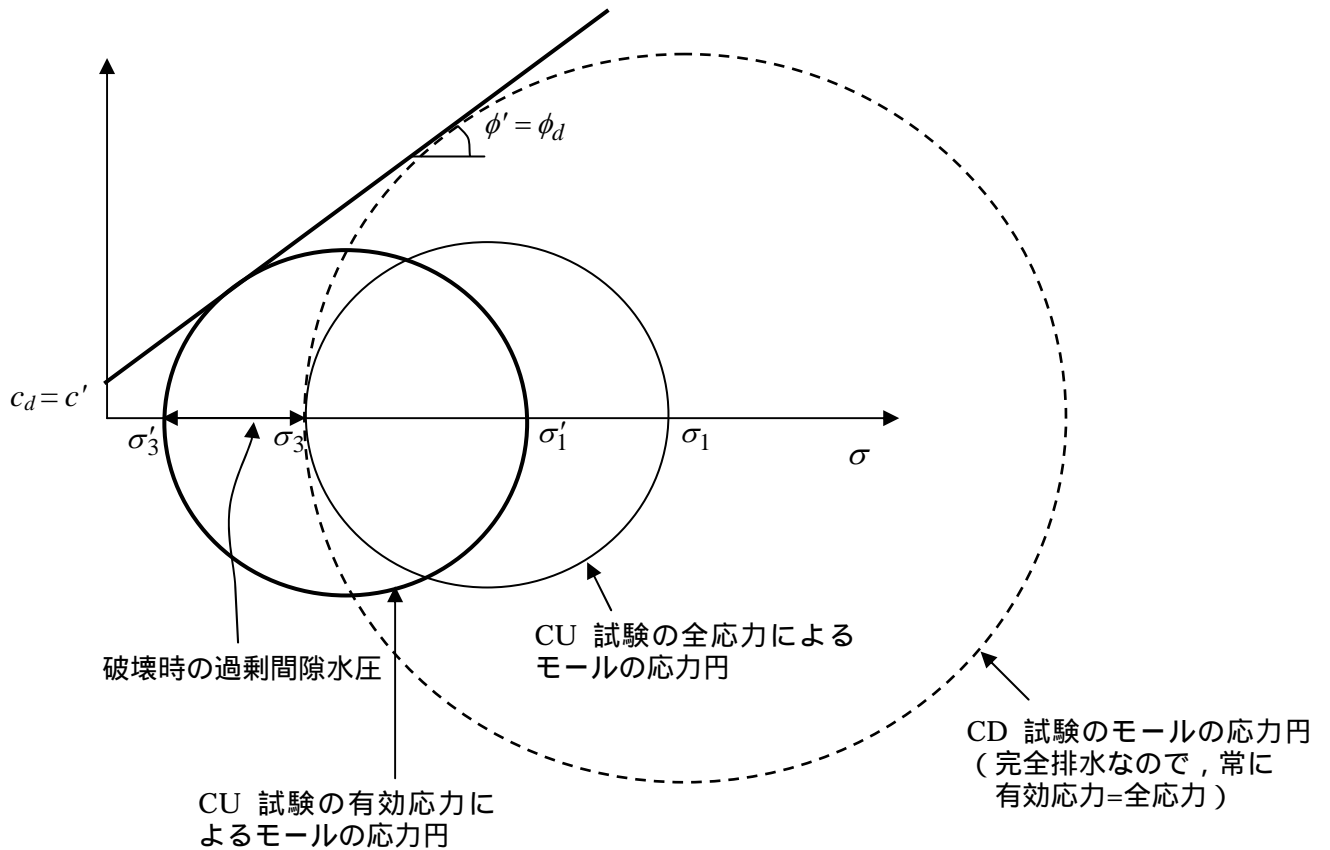
モールの応力円



CU 試験の全応力でのモールの応力円と有効応力でのモールの応力円(1)



CU 試験の全応力でのモールの応力円と有効応力でのモールの応力円(2)



CU試験のモールの応力円とCD試験のモールの応力円

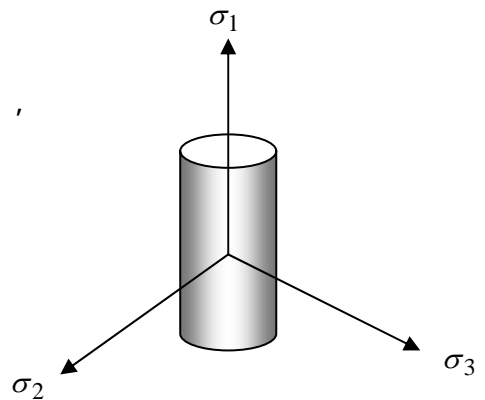
【三軸条件：三軸応力状態】

三軸とは直交する3つの主応力軸のことであった。  
 応力状態を図示するとき、2次元にしる3次元にしる何気なく、  
 お互いの軸が直交するように描いてきた。(正方形が良い例)  
 それは、応力テンソルは対称テンソル(行列)だからである。  
 対称行列の各固有ベクトルはお互いに直交する性質がある。  
 すなわち、主軸は直交する。応力テンソルの固有値は主応力  
 であるが、要するに主応力軸は主軸そのものであり、  
 お互いに直交する。

簡単のため2次元応力状態を考える。

応力テンソル $\sigma$ に2つの異なる固有値( $\sigma_1, \sigma_3$ )、固有ベクトル( $\lambda_1, \lambda_3$ )が存在したと仮定する。  
 この場合、( $\sigma_1, \sigma_3$ )はそれぞれ最大および最小主応力に相当し、( $\lambda_1, \lambda_3$ )は( $\sigma_1, \sigma_3$ )が作用する方向の基底ベクトルを表す。ここで( $\sigma_1, \sigma_3$ )はスカラーであり、( $\lambda_1, \lambda_3$ )はベクトルであることに注意。  
 固有値の定義から、 $\sigma\lambda_1 = \sigma_1\lambda_1 \cdots$  式(1) および  $\sigma\lambda_3 = \sigma_3\lambda_3 \cdots$  式(2) である。

式(1)の両辺の左から $\lambda_3^T$ を掛けると、 $\lambda_3^T\sigma\lambda_1 = \sigma_1\lambda_3^T\lambda_1$  となるが、この式を両辺転置すると、  
 $\lambda_1^T\sigma\lambda_3 = \sigma_1\lambda_1^T\lambda_3 \cdots$  式(3)となる。一方、式(2)の両辺に左から $\lambda_1^T$ を掛けると、  
 $\lambda_1^T\sigma\lambda_3 = \sigma_3\lambda_1^T\lambda_3 \cdots$  式(4)となる。式(3)と(4)の右辺を比べると、  
 $\sigma_1\lambda_1^T\lambda_3 = \sigma_3\lambda_1^T\lambda_3$  となり、移項して整理すると、  
 $(\sigma_1 - \sigma_3)\lambda_1^T\lambda_3 = 0 \cdots$  式(5)となる。 $\sigma_1 \neq \sigma_3$ であるので、式(5)が成立するためには、  
 $\lambda_1^T\lambda_3 = 0$ すなわち、 $\lambda_1 \perp \lambda_3$ で無ければならない。(主軸は直交する)

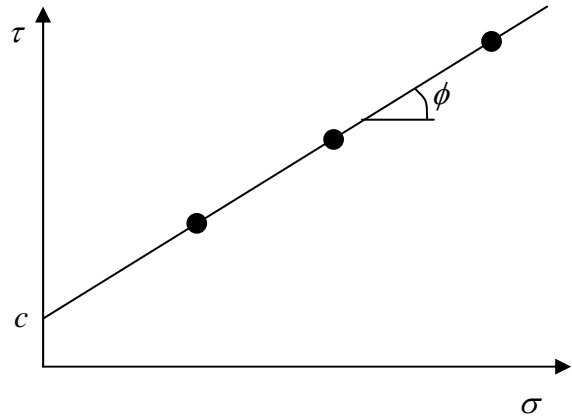


【三軸試験とモール・クーロンの破壊規準】

【モール・クーロンの破壊規準】

クーロン (Coulomb) の破壊規準 :

一面せん断試験は, 計測している応力状態 (垂直応力とせん断応力) が破壊面での応力状態そのものであるため, 例えば, 3 種類の垂直応力で一面せん断試験を実施して, それぞれの (最大せん断応力) が求められれば, それを右図のようにプロットすれば, ほぼ直線に並ぶ。

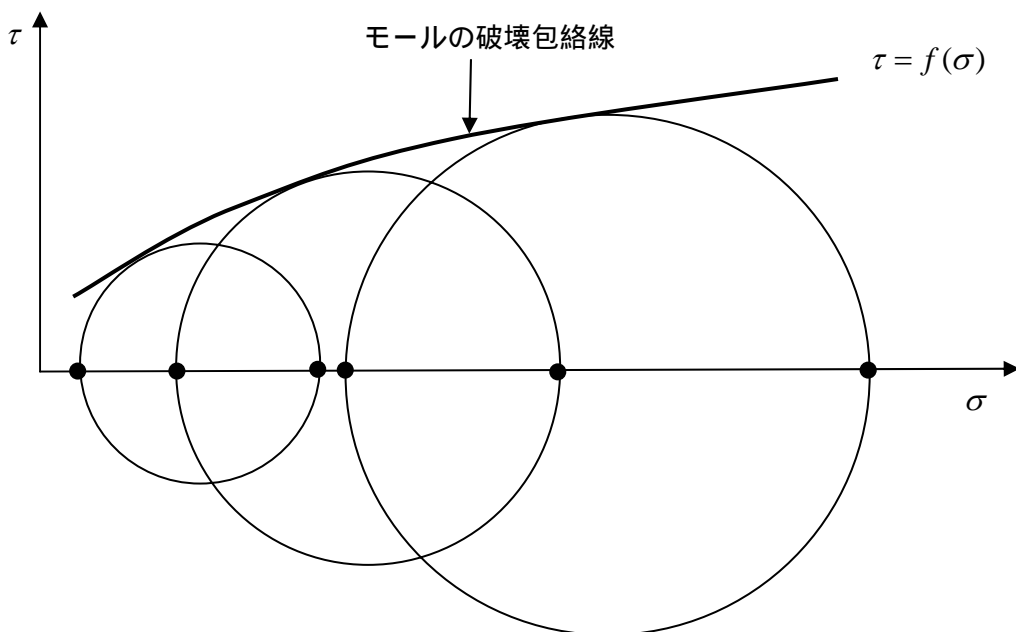


このとき, 切片を  $c$ , 直線の傾きの角度を  $\phi$  として, 次式のように土が破壊する条件を表した。

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad \text{クーロンの破壊規準}$$

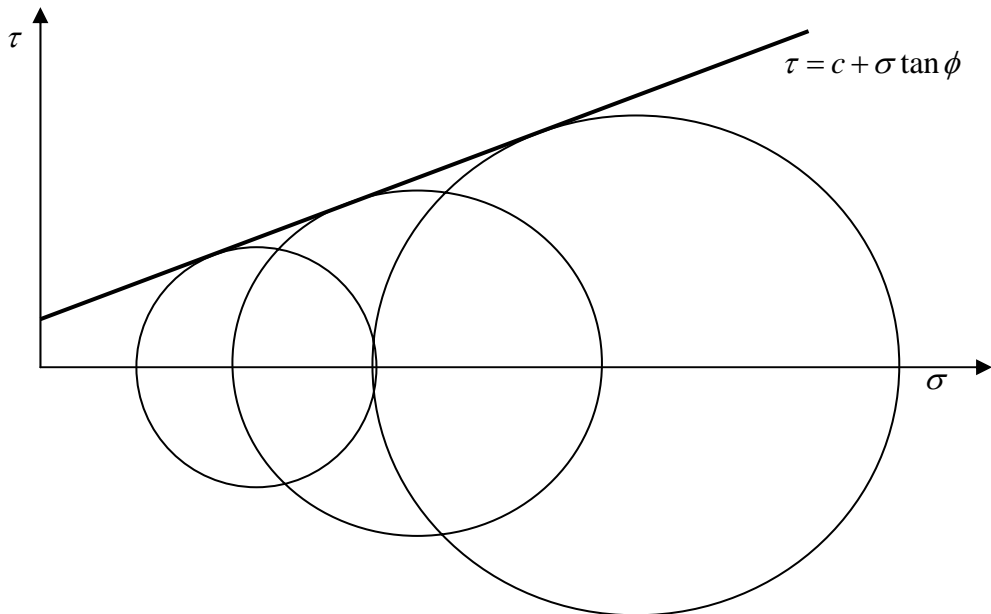
モール (Mohr) の破壊規準 :

三軸試験 (CU あるいは CD 試験) を 3 種類以上の拘束圧で実施し, それぞれについて破壊時の主応力状態を用いてモールの応力円を描いた場合, 下図のように, モールの応力円の包絡線を描くことが出来る。この包絡線は, クーロンの破壊規準と同様に, それより上の領域では, 土は壊れていることを意味しており, モールの破壊規準と呼ばれている。この図のように, 包絡線が曲線 (特に上に凸の曲線) となるのは, 不飽和土の場合に多く見られる。 (三軸試験では, 主応力しか計測していない。)



モール・クーロン (Mohr-Coulomb) の破壊規準 :

モールの破壊規準の場合と全く同様に, 三軸試験の結果からモールの応力円を描いた場合, 特に飽和土や砂の場合には, 破壊包絡線は直線となる場合が多い。その場合の直線は, クーロンの破壊規準における直線と同じものである。このように, モールの応力円の包絡線から, クーロンの破壊規準と同様の直線を引いて破壊規準を定めたものを, 2つの破壊規準をあわせてモール・クーロンの破壊規準と呼ぶ。



【モール・クーロンの破壊規準の主応力表示】

破壊規準の直線  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  上にある点  $(\sigma, \tau)$  は三軸試験の試験で計測された主応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  を用いて,

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi$$

と表すことができる。

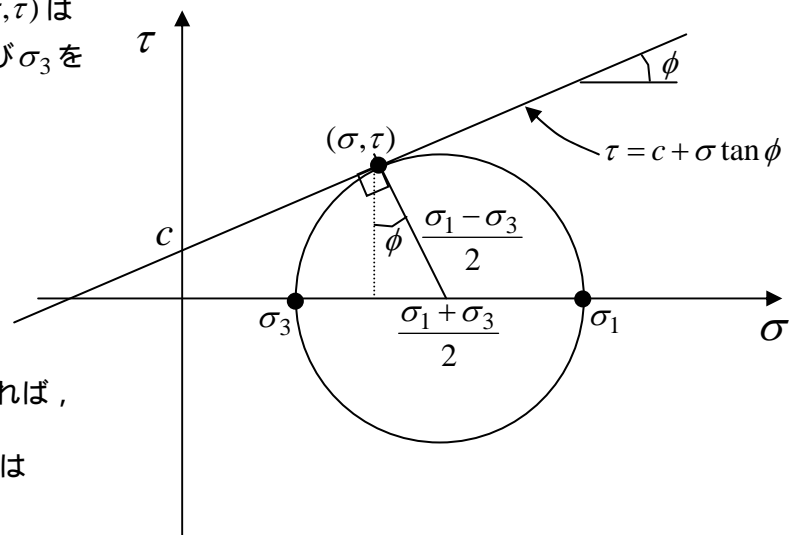
これを元の破壊規準  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  に代入すれば,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi \quad \text{または}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi$$

となる。これをモール・クーロンの破壊規準の主応力表示と呼ぶ。

もちろん, 上図の幾何学的な関係,  $(c \cot \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}) \sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  からも直接求めることができる。





【有効応力の破壊規準】

以下の三軸試験を行った場合には、常に有効応力状態を把握することが可能であり、有効応力で破壊規準を表すことが可能となる。

$$\tau = c' + \sigma' \tan \phi' \leftarrow \text{有効応力の破壊規準}$$

飽和土を対象とし、圧密非排水せん断（CU）試験を実施し、せん断過程中に発生する間隙水圧を計測する場合。

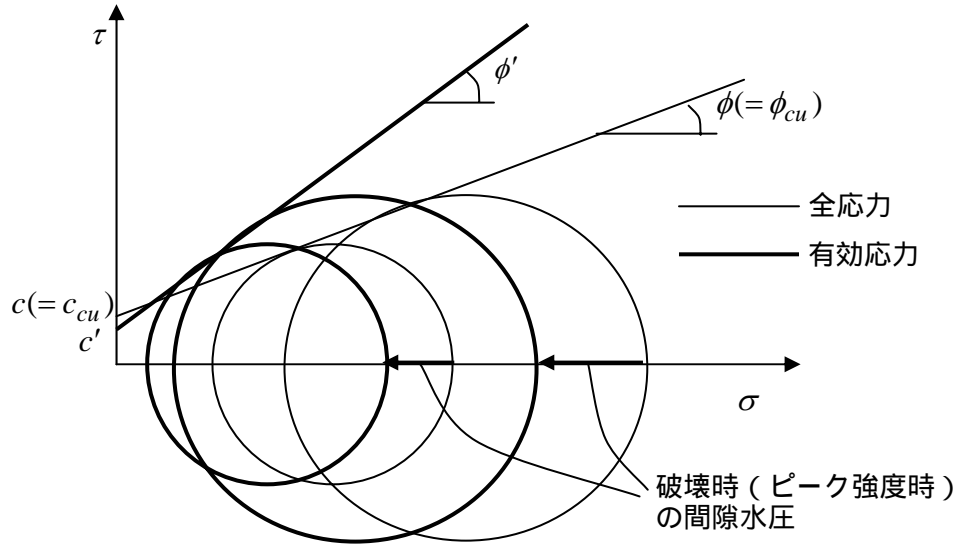
飽和土を対象とし、圧密排水せん断（CD）試験を実施した場合。

乾燥砂を対象とし、圧密排水（実際は排気）せん断試験を実施した場合。

の場合には、計測した垂直応力から計測した間隙水圧を引いて有効応力を求めればよい。

と の場合には、計測しているものはすべて有効応力に等しいと考えて良い。

右図は、 の場合の、飽和土のCU試験の場合の全応力のモール・クーロンの破壊規準と有効応力の破壊規準との関係を表したものである。



上記の3条件以外で行う三軸試験では、供試体に作用する有効応力を把握することは難しいので、通常全応力で整理し、有効応力を用いることはほとんどない。

例：不飽和土の実験，UU試験，

【有効応力の破壊規準と破壊面との関係】

三軸試験において、有効応力の破壊規準を考えた場合、破壊時の主応力が $\sigma'_1$ および $\sigma'_3$ だった場合に、破壊条件に達している（すなわち、破壊規準の直線上にある）垂直有効応力とせん断応力の値はそれぞれいくらになるのか考察する。また、そのような破壊規準に達している応力状態が作用する面は、水平面（すなわち最小主応力 $\sigma'_3$ が作用する面）から、どれだけ傾いているのかも考察する。

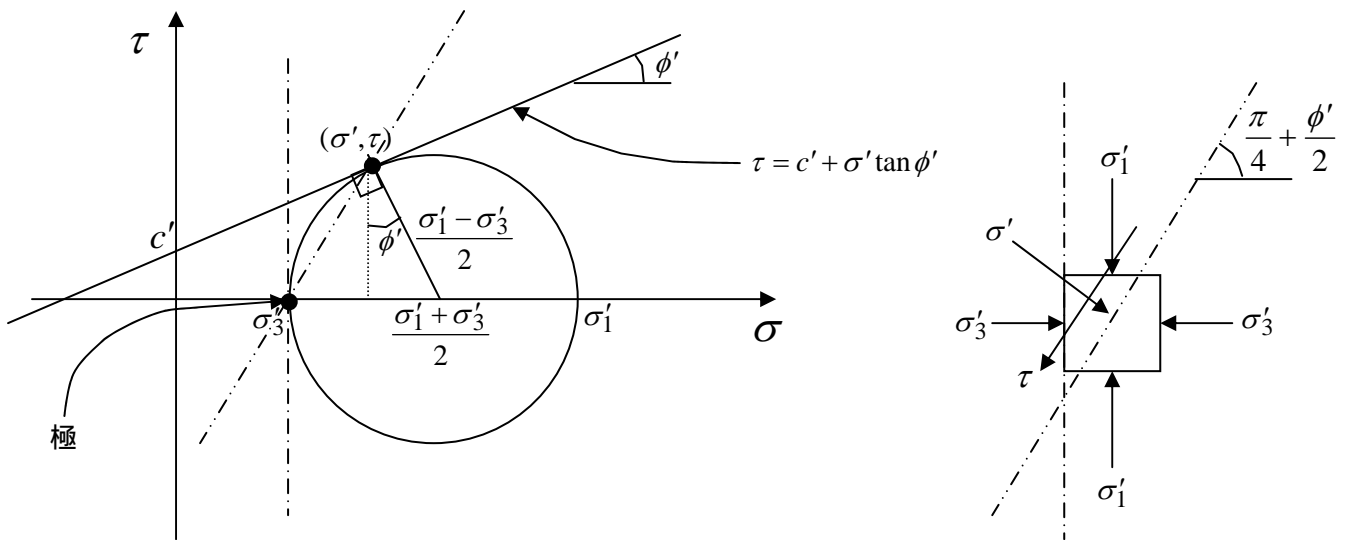
次ページの図から、有効応力で描いたモールの応力円の幾何学的な関係から、有効応力の破壊基準 $\tau = c' + \sigma' \tan \phi'$ に達している有効応力状態 $(\sigma', \tau)$ は、

$$\sigma' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} - \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \sin \phi', \quad \tau = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \cos \phi'$$

となる。

それらが働く面の方向は、 $\sigma'_3$ が働く最小主応力面をモールの応力円の図上に描けば、 $(\sigma'_3, 0)$ が極であることが求まり、その極から $(\sigma', \tau)$ へ引いた線がその応力が働く面となる。したがって、幾何学的な関係

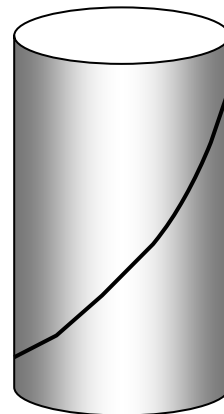
から、最小主応力面からは $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}$ 、最大主応力面からは $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}$ 傾いた面となる。



この考察は非常に重要な意味がある。

このように、三軸試験では、主応力で載荷することにより、垂直応力とせん断応力の比が最も危険となる、すなわち破壊規準を満たす組み合わせとなる、応力状態が自ずと現れるようにしている。また、その応力状態が作用する面は、土のせん断抵抗角によって決まる傾きとなる。

\*せん断応力は、等方的な垂直応力（常に物体の面に対して垂直に加わる）である水圧の影響は無い。そのため、垂直応力は有効応力が全応力かを慎重に考えなければならないが、せん断応力は有効応力も全応力も関係ない。



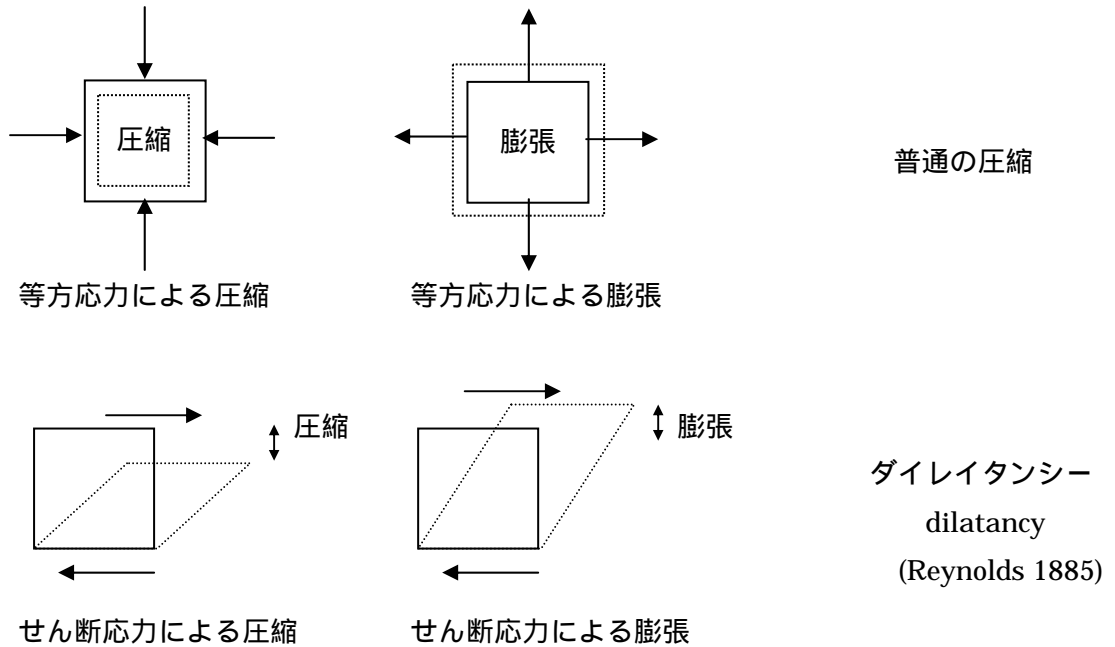
三軸圧縮試験（CU 試験）後の粘土供試体

実際に三軸試験した粘土の供試体には、上の図のように「せん断面」と呼ばれる不連続面が観察される場合がある。この面の傾きは、供試体の形状や実験条件（載荷速度、排水条件等）によって変わるが、 $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}$ に近い角度が観察されることが多い。

【土のダイレイタンスー】

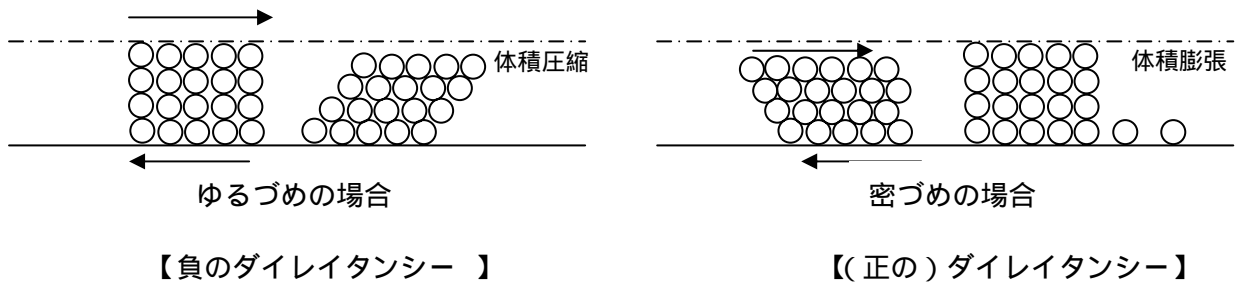
(1)ダイレイタンスーとは

圧縮や膨張などの体積変化は、通常は等方的な応力が作用して発生する。しかし、せん断応力が作用して体積変化が起こる場合がある。これをダイレイタンスーと呼ぶ。



(2)ダイレイタンスーの発生原因

ダイレイタンスーは粒状体の典型的な挙動である。



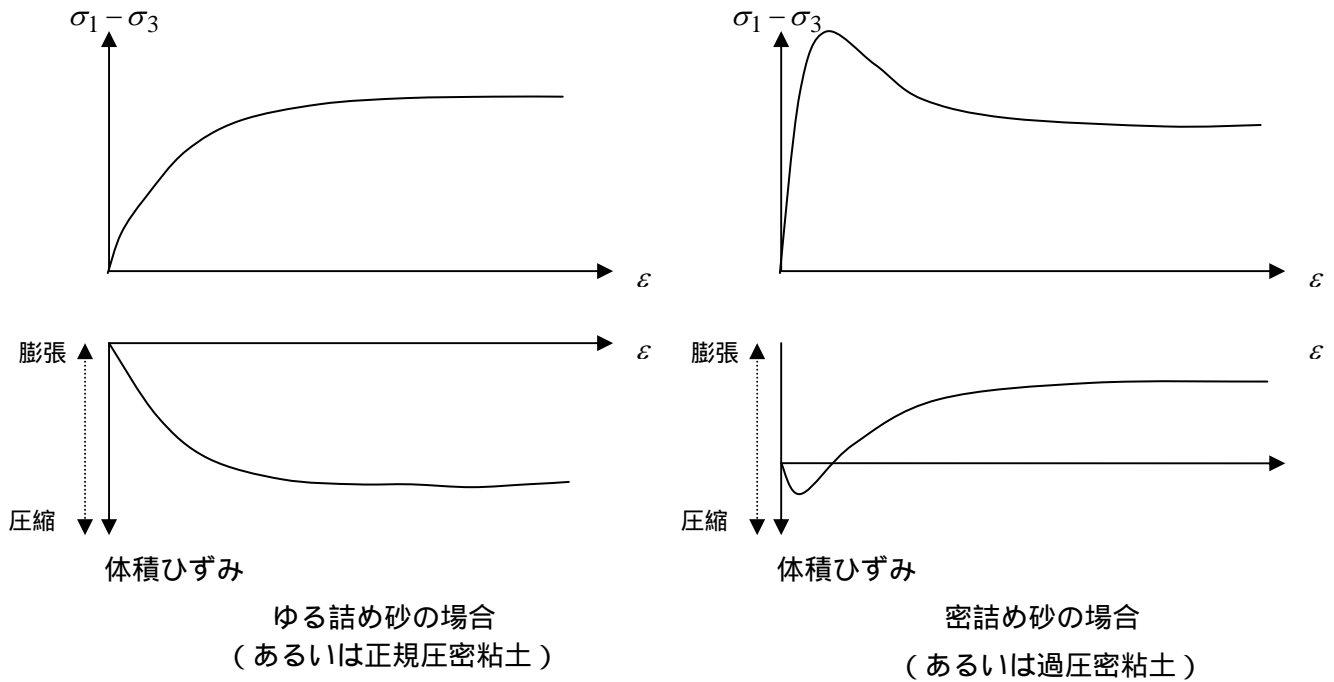
(3)身近なダイレイタンスーの例

- ・砂浜の波打ち際で砂を踏むと一瞬乾いたように（水が吸い込まれていくように）見える。
- ・小麦粉などの粉を器に入れるときに、ゆするとたくさん入るようになる。
- ・コーヒー豆をミルで挽くとき、抑えるものが無くてコーヒー豆は粉になる。
- ・金属の玉がたくさん入った箱の中にむやみに手をいれようとするとき、あふれてしまう。
- ・満員電車で降りるために動くと、大きな抵抗を受ける。

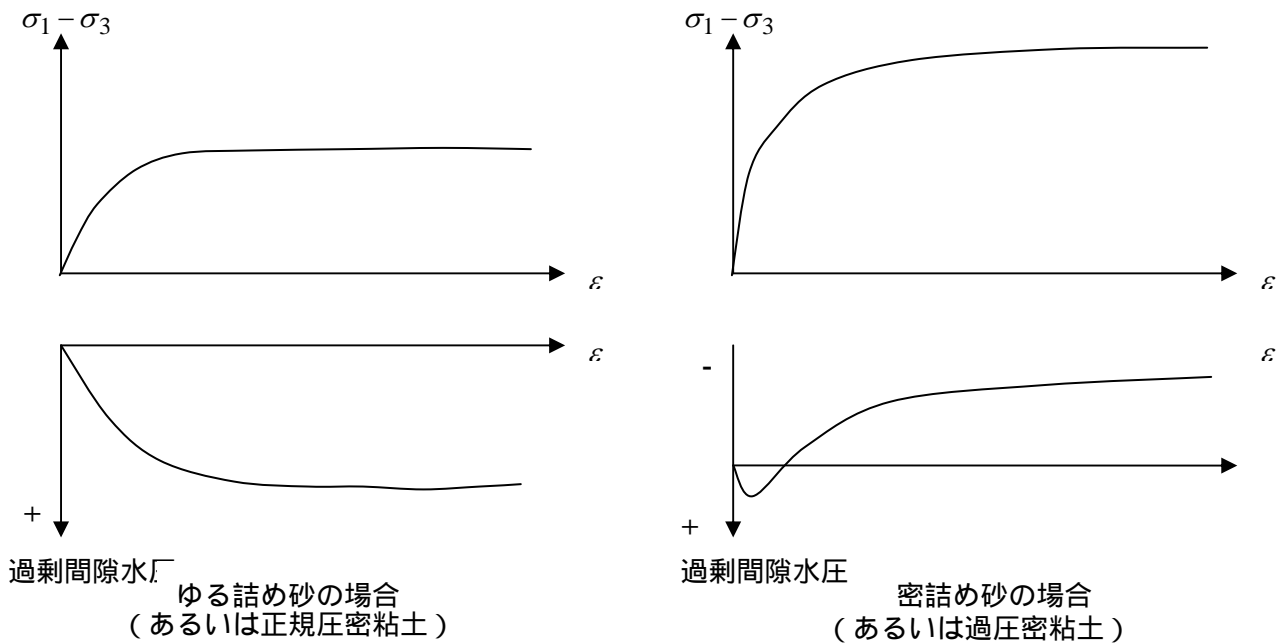
(他にもいろいろ考えてみましょう)

(4)実際の砂の挙動 (排水条件 CD 試験)

砂粒の間隙が水で満たされており、その水が出入り自由な排水条件である場合には、軸圧縮に伴うせん断により、ゆる詰め砂は圧縮してゆき、密詰め砂は膨張する。密詰め砂が最初に少し圧縮するのは弾性圧縮のためである。ダイレイタンスーは塑性挙動であり、弾性圧縮が終わったあとに、大きく発生する。



(5) 実際の砂の挙動 (非排水条件 CU 試験)



間隙水の出入りを許さない条件 (非排水条件・等体積条件) でせん断すると、

ゆる詰め砂 (あるいは正規圧密粘土) の場合：

砂粒の立場では、圧縮したいのにさせてもらえない。圧縮させないように砂粒を膨らまそうとする内力が働く (これが、正の過剰間隙水圧)  
 水の立場では、隙間が狭くなろうとして窮屈なので外に出たいが出られない。押し込められた水には正の過剰水圧が発生。

密詰め砂 (あるいは過圧密粘土) の場合：

砂粒の立場では、膨張したいのにさせてもらえない。膨張させないように砂粒を凝集・吸着しようとする内力が働く (これが、負の過剰間隙水圧)  
 水の立場では、隙間が広くなろうとするので、外から入ってきてほしいがこない。引っ張られる水には負の過剰水圧が発生。

【排水条件と非排水条件の試験の用途】

(1)土構造物の設計

盛土や切土斜面,擁壁,基礎構造物等の構造物を作る場合,土の設計定数として $c, \phi$ が用いられる。これは三軸試験や一面せん断試験で求められるが,どのような条件で求められた $c, \phi$ かということが重要となる。

(2)  $c, \phi$ を求める条件とその活用法

砂は透水性が高いので,自然界においても排水条件にあると考えてよい。(ただし,地震時のように短時間に大きなせん断力が加わる場合には非排水条件で考える場合もある。)そのため,ほとんどの場合には,排水条件の試験を行い, $(c_d, \phi_d)$ を求める。

一方,粘土は透水性が低いので,どのような構造物を作り,どのような時間でその構造物の安定を考えるかによって, $c, \phi$ の求め方も変わってくる。通常は,全応力で考える場合が多い。

(a)地下水面下の飽和土

飽和土では,全応力の $(c, \phi)$ を用いるか(全応力解析)有効応力の $(c', \phi')$ を用いるのか(有効応力解析)土質によって適宜判断される。以下全応力解析を,有効応力解析をとする。

砂~砂質シルトの場合

完全排水条件で試験\*を行い $(c_d, \phi_d)$ を求める。この場合, $(c_d, \phi_d)$ は有効応力の $(c', \phi')$ と全く同じものとなる。

(\*排水条件の一面せん断試験, CD 三軸圧縮試験)

砂は透水係数が大きい(透水性がよい)ので,簡単に完全排水(過剰間隙水圧なし)条件が実現できる。また,正のダイレイタンスーのために真空中に近い負圧が発生するため非排水三軸圧縮試験は適さないことが多い。

粘土~粘土質シルトの場合

一軸試験や UU 三軸圧縮試験を行い,全応力解析(すなわち $\phi_u=0$ 解析法)のために, $c_u$ を求める。

強度定数は, $(c, \phi) = (c_u, 0)$ となる。

CU 三軸圧縮試験を行い,有効拘束圧に応じた, $c_u$ を求め,強度増加率 $c_u/p$ を求める。

強度定数は見かけ上, $(c, \phi) = (c_{cu}, \phi_{cu})$ が求められるが,使用するのは,それぞれの有効拘束圧の時の $\tau$ の値である $c_u$ と強度増加率 $c_u/p = \tan \phi_{cu}$ である。

完全非排水条件でせん断試験\*を行い,試験中の過剰間隙水圧 $u_w$ を計測することにより,有効応力の $(c', \phi')$ を求める。

(\*非排水(等体積)条件の一面せん断試験, CU三軸圧縮試験)

粘土は透水係数が小さい(透水性が悪い)ので,完全排水(過剰間隙水圧なし)条件を実現するには長時間かけて試験する必要が生じ,大変である。

の全応力解析は,(仮設構造物のように)短期間の安定を考える場合に有効となる。の有効応力解析は(永久構造物として)長期間に亘る安定を考える場合に重要となる。

粘土地盤上に盛土を作る場合のように圧密が伴う問題は、時間の経過とともに安定性は向上する（どんどん強くなっていく）ので、全応力解析で十分であることが多い。

### (b)地下水面上の不飽和土あるいは乾燥砂

粘土やシルトは保水性能が高いため、自然界で乾燥状態にある場合は少ない。

#### 乾燥砂の場合

乾燥状態のまま完全排水ならぬ完全排気試験を行い、 $(c, \phi)$ を求める。この場合  $(c, \phi)$ は有効応力の $(c', \phi')$ と等しいと考える。ただし、乾燥砂では $c'=0$ である。

#### 不飽和土の場合

不飽和状態のまま、完全排水・排気試験を行い、 $(c, \phi)$ を求める。

水浸させて飽和状態にし、完全排水条件で試験を行い $(c_d, \phi_d)$ を求め、有効応力の $(c', \phi')$ として扱う。

通常は の全応力解析ですませるが、最悪の状態も想定して の有効応力解析をする場合もある。

### (3)粘着力 $c$ とは何か

#### ・飽和粘土の場合（上記(a)- ）

有効応力で表す $(c', \phi')$ と全応力で表す $(c_u, 0)$ がある。両者の関係は、以下の通り。

$$c' \ll c_u \quad \phi' \gg \phi_u = 0$$

特に、通常の正規圧密粘土の場合 $c'=0$ となり、過圧密粘土や疑似過圧密粘土（過圧密粘土のように振る舞う正規圧密粘土）では若干の $c'$ が存在する。この $c'$ は、長い年月（何百万年～何万年）をかけて粘土が堆積したために生じた化学的な固結力や力学的な荷重履歴による粒子間のかみ合わせの強化（正のダイレイタンスの発生）に起因するものであり、「真の」粘着力と呼ぶ人もいる。

一方、全応力解析での $c_u$ は、完全非（吸）排水条件下でのみ成り立つ、みかけの粘着力である。すなわち、ある応力状態にある飽和粘土から荷重を除荷した場合、水を吸いながら間隙比が大きくなりせん断強さは低下してゆくが、吸水を許さなかった場合は、間隙水に負圧（サクシオン）が働き、せん断強さは低下しない。このサクシオンが飽和粘土の見かけの粘着力となる。

吸水を許した途端に、見かけの粘着力は確実に喪失してゆく。完全非（吸）排水条件は、粘土の短期安定問題を考える場合の仮想的な条件である。（盛土安定では安全側、掘削安定では危険側）

#### ・不飽和土の場合

全応力で表す $(c, \phi)$ と有効応力で表す $(c', \phi')$ がある。両者の関係は、以下の通り。

$$c > c' \quad \phi \geq \phi'$$

特に、不飽和土の $c$ は飽和粘土と同様に「真の」粘着力 $c'$ と、サクシオンに起因する見かけの粘着力の和と考えられる。したがって、不飽和土が水浸してしまった場合は、見かけの粘着力相当分が喪失し、「真の」粘着力 $c'$ まで低下してしまう。（しかし、上述のように $c'$ は非常に小さいことが多い）

不飽和状態は至る所に存在する自然な状態である。擁壁構造物等では、裏込め土に不飽和状態を保ち続けさせるための工夫をするのが一般的である。（排水口を設けて水が貯まらないようにする等）

【一軸圧縮試験と三軸圧縮試験による飽和粘土地盤のせん断強度調査】

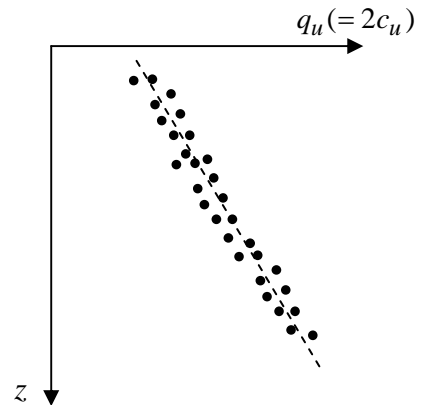
(1) 原位置の正規圧密粘土地盤

原位置にある正規圧密粘土地盤は、深度に応じた有効土被り圧によって圧密が完了している。そのため、粘土は深くなるにしたがって、大きな有効拘束圧(圧密応力)で圧密されているので、深くなるほど間隙比は小さくなり、せん断強度は大きくなる。

重要なポイント: 粘土のせん断強度は間隙比と有効応力と1対1対1の関係であり、間隙比が小さいほどせん断強度は大きくなる

原位置の粘土をボーリングによってサンプリングし、一軸圧縮試験を行い、それぞれの一軸圧縮強度  $q_u$  (=非排水せん断強度  $c_u$  の2倍) をプロットしたものが右図である。プロットの数だけ一軸圧縮試験をした

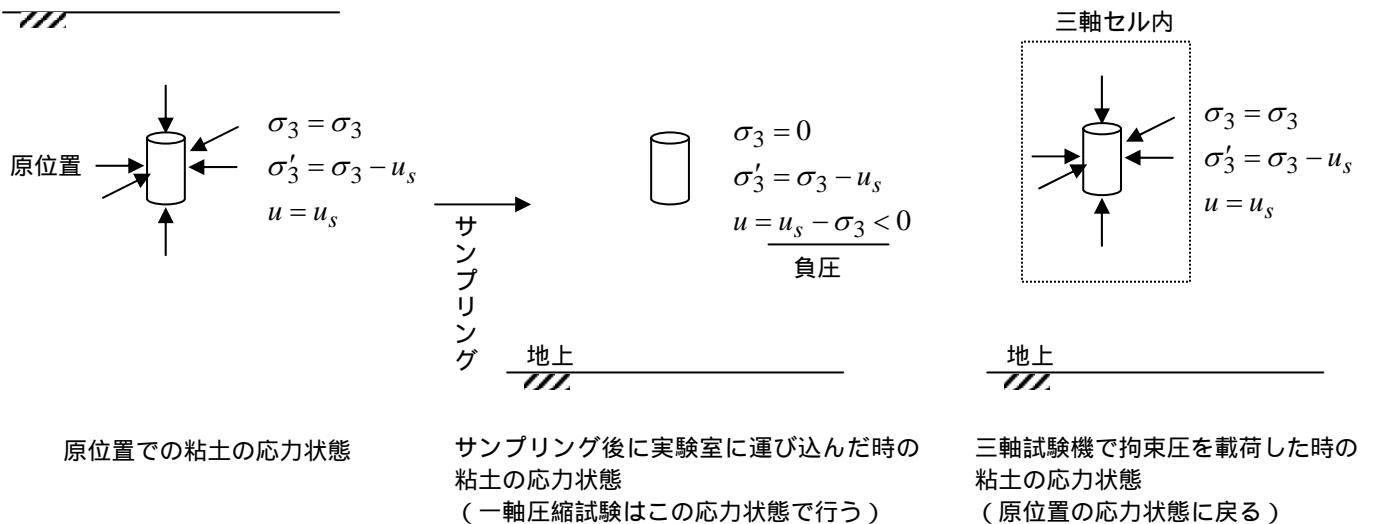
ことを示している。通常、ここまで多数の実験をすることは少ないが、一軸圧縮試験によって、地盤全体の非排水せん断強度を把握するためには、ある程度の数の実験が必要である。



(2) 非圧密非排水せん断試験 (UU 試験) の役割

原位置からサンプリングしてきた粘土を、なるべく原位置の状態に近づけて実験を行う。

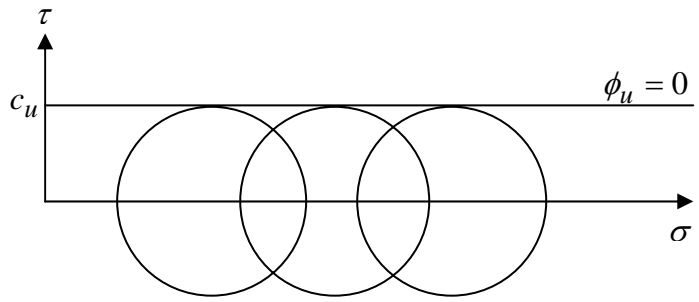
そのため、サンプリング時から原位置での粘土の含水比(間隙比)を変えないように注意して、実験室に搬入して三軸試験機にセットし、原位置の有効土被り圧と同等の拘束圧を、間隙比を変えないように非排水のまま载荷する。ここでの、拘束圧は粘土内部の応力状態を、原位置に近づけるためのものである。



- ・ 原位置では、土被りに相当する  $\sigma_3$  が全応力で粘土に作用しており、深度に応じた静水圧  $u_s$  も作用しているため、有効応力は全応力から静水圧を差し引いた  $\sigma'_3 - u_s$  となる。
- ・ サンプリングして地上に出された粘土には外から圧力が作用しないので、全応力はゼロになる。しかし、サンプリング後も間隙比が変わっていないので、有効応力は原位置の時と同じである。そのため、全応力から有効応力を引いたものが水圧であるが、この場合は  $u_s - \sigma_3$  となり、粘土の中は負の間隙水圧となる。
- ・ 三軸セル内で圧力を加えることにより、粘土は原位置の応力状態に戻る。ただし、 $\sim$  を通して、粘土の間隙比は変わらないので、有効応力はずっと同じである。

(3)非圧密非排水せん断試験（UU 試験）の結果の整理

拘束圧  $\sigma_3$  を色々変えて実験を行っても、拘束圧を作用させた時点から非排水状態の非圧密であるので、間隙比は変わらず、有効応力も変化せず、結果としてせん断強度も増加しない。 拘束圧を増加させた分はすべて間隙水圧の変化となる。



破壊時の応力状態をモールの応力円で

表すと右図のようになる。 $\sigma_3$  を何通りも変えても、半径が同じ応力円となるので、破壊包絡線は水平になる。そのため、内部摩擦角  $\phi$  は  $0^\circ$  となるが、これは UU 試験で得られる特別なものであることに注意する。

UU 試験で得られる重要な土質定数は、

$$\text{非排水せん断強度} : c_u = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)_f \quad (f \text{ は破壊時の意味})$$

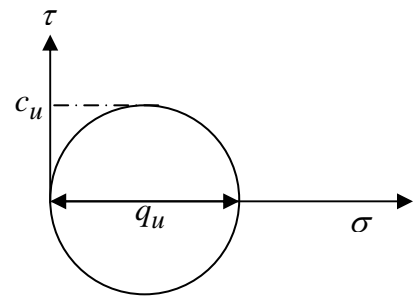
この非排水せん断強度  $c_u$  は粘土の短期安定問題を念頭においた設計に非常によく用いられる重要な土質定数である。また、この  $c_u$  を用いて行う解析を破壊包絡線が  $0^\circ$  であることから、 $\phi_u = 0$  解析法 と呼ばれる（全応力解析の代表）。

(4)一軸圧縮試験と UU 試験の関係

一軸圧縮試験は、UU 試験において、 $\sigma_3 = 0$  の特殊な場合と同じと考えて良い。

求められる土質定数は、一軸圧縮強度  $q_u = \sigma_{1f} = 2c_u$

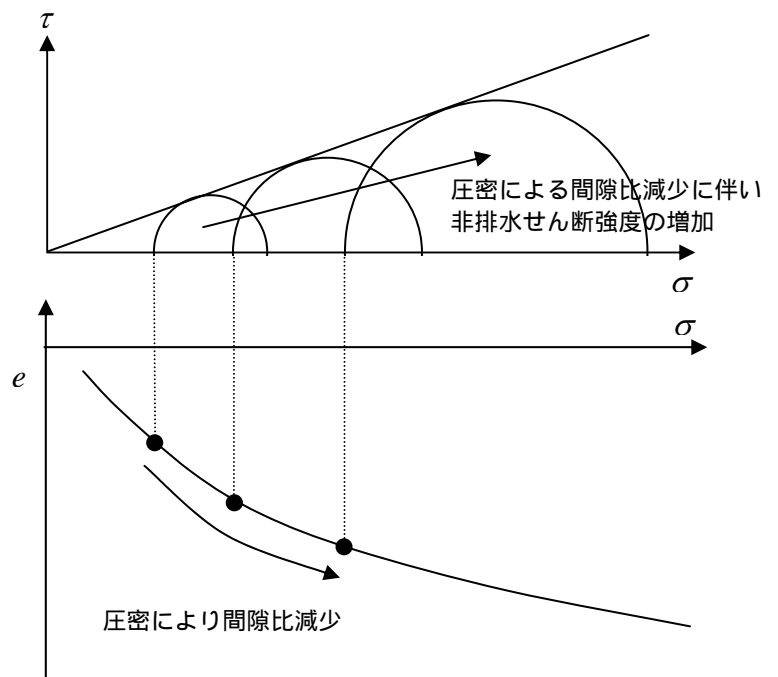
摩擦則を思い出すと、通常拘束圧が無ければ土はせん断強度を持たないはずであるが、飽和粘土の場合には、全応力がゼロになっても、負の間隙水圧（ダイレイタンスーで学んだように、負の水圧は吸い着ける効果がある）が有効拘束圧の役割を果たし、有効応力を維持するために、せん断強度を発揮できる。



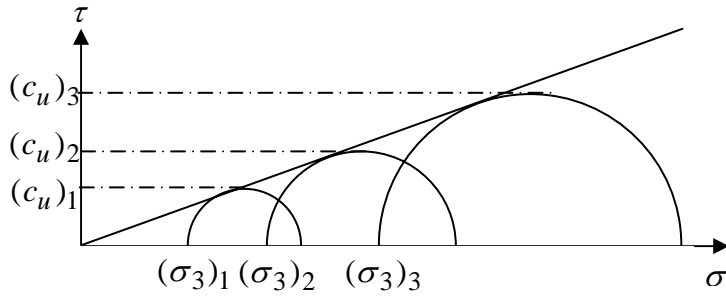
(5)圧密非排水せん断試験（CU 試験）の役割 1

UU 試験は三軸セル内で原位置の応力状態に戻すようにしているが、実際の地中の応力状態は異方的（縦と横の応力が違う）であり、また、内部の有効応力状態も完全には把握できない。そのため、CU 試験ではサンプリングしてきた粘土を、一旦完全に圧密し直すことにより、非排水せん断時の有効応力状態を明確にして実験を行うことができる。

また、この配付資料のはじめに示した図のように、正規圧密粘土地盤は深さ方向にせん断強度が増加してゆくが、その強度増加率を正確に把握するには UU 試験では、サンプリング深さが異なる試料を何本か用いて試験をしなければならない。しかし、粘土地盤がある程度均質ならば、CU 試験によりある深さでサンプリングした粘土だけを使用して、深さ方向の強度増加率を求めること







強度増加率

$$\frac{(c_u)_1}{(\sigma_3)_1} = \frac{(c_u)_2}{(\sigma_3)_2} = \frac{(c_u)_3}{(\sigma_3)_3} = \frac{c_u}{p}$$

ができる。なお、普通1本のサンプリングチューブ約1mで(要するに1回のボーリングで)、数本の試験用供試体が採取できるため、同じチューブの試料を用いて実験すれば、他の深度からサンプリングしてきた粘土を用いて実験するよりも圧倒的に経費が安いのは明らかである。

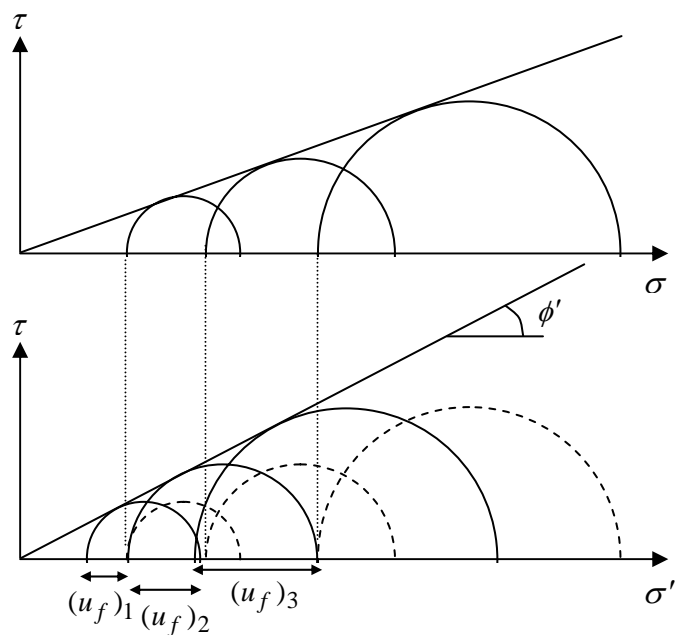
上図のように、全応力のモールの応力円でのCU試験結果の整理は、強度定数 $c, \phi$ を求めるというよりも、全応力解析である $\phi_u = 0$ 解析法の延長上で、拘束圧 $\sigma_3$ の増加に伴い、どれだけ非排水せん断強度 $c_u$ が増加するかを検討するために用いられる。

同じ深度の粘土を用いても、上図のように、3種類以上の有効拘束圧を用いてCU試験をすれば、強度増加率が求められる。強度増加率は、言うまでもなく、本資料の最初の図の深度方向に強度が大きくなることを示す直線の傾きと等価である。

#### (6) 圧密非排水せん断試験 (CU 試験) の役割 2

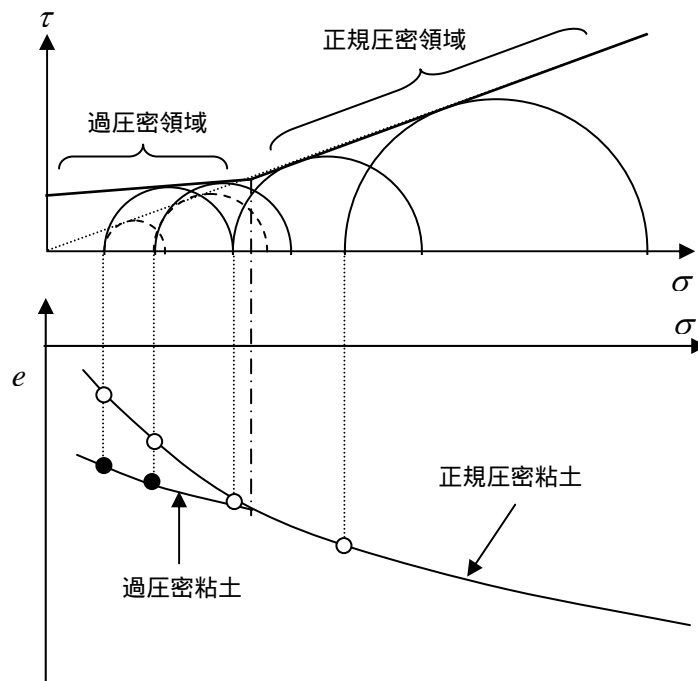
CU試験の最大の特長は、試験中の間隙水圧を正確に計測できることから、圧密、せん断の両過程を通して、試験中の有効応力状態が明確であることである。そのため、有効応力規準の $c', \phi'$ を求めることができる。粘土の場合、排水せん断試験CD試験は長時間を要するために実務向きではないために、せん断中の有効応力を把握するためにはCU試験が最も実用的でよく用いられている。

以前は、 $c', \phi'$ を求めるのは長期安定問題を検討するためであったが、最近では別の用途でせん断中の有効応力状態を把握することが非常に重要となってきた。近年、コンピュータの発達はめざましく、数値解析が実務上もよく用いられるようになってきた。土の挙動を正確に数値解析するためには、精度の高い土のモデルを用いる必要がある。それらは土骨格自身のモデルのため、有効応力で記述されている。そのため、数値解析を行うのにあたり、CU試験を行いモデルのパラメータを決定することになる(研究用途であるが、モデル化自身を行うためにも、もちろんCU試験は必要不可欠である)。



(7)過圧密粘土のCU試験結果

下図は、過圧密粘土も含めたモールの応力円（全応力表示）である。正規圧密粘土ではモールの応力円の破壊包絡線は原点を通る直線となるが、過圧密粘土になると包絡線は上側に移動し原点を通らなくなる。過圧密粘土の場合、正規圧密粘土と同じ有効拘束圧であっても間隙比はずっと小さいために、非排水せん断強度は正規圧密粘土よりもだいぶ大きくなる。また、下側の圧縮曲線を見てもわかるように、過圧密粘土の圧縮指数（圧縮曲線の傾き）は小さいために、有効拘束圧が多少変化しても間隙比に大きな変化はなく、非排水せん断強度に大きな差は生じない。そのため、過圧密粘土の破壊包絡線は上側に上昇し、傾きは小さくなる。その結果、見かけの粘着力が発生するようになる。



## 【飽和粘土の力学 (有効応力径路等) &amp; その他】

モール・クーロンの破壊規準を用いて強度定数  $c, \phi$  や非排水せん断強度  $c_u$  の基礎的な強度定数を求めるだけであれば、今までの議論で十分であるが、もっと詳細に土の性質を知るためには、有効応力を用いてより詳しく試験結果を整理し、土の挙動を観察する必要がある。最近、常識的に行われている有効応力を用いた粘土の試験結果の整理法について簡単に解説する。

## (1) 用いるパラメータ (軸差応力と平均有効応力)

有効応力の重要なパラメータとして、以下の2つを用いる。

$$\text{軸差応力} \quad q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (= \sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\text{平均有効応力} \quad p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$$

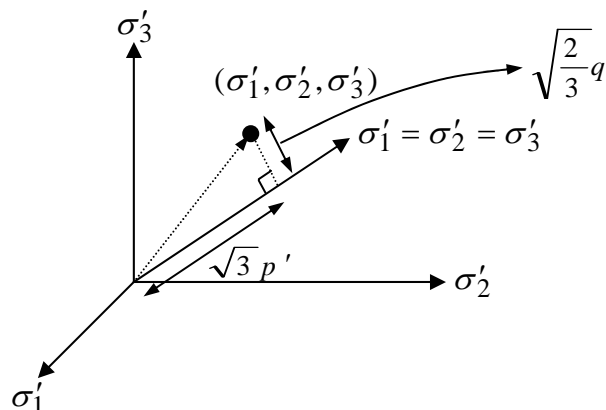
軸差応力は、偏差応力とも呼び、最大主応力と最小主応力の差である。

平均有効応力は、全有効主応力の平均であるが、三軸試験では  $\sigma'_2 = \sigma'_3$  であるので右辺のようになる。

もう少し、詳しくこれらを説明すると、 $p'$ 、 $q$  はいずれも有効応力の不変量である。不変量とは、例えば右図で3つの軸があるが、この軸をどのように回転させても、 $p'$  や  $q$  の値は変化しないことをいう。したがって、原地盤からサンプリングしてきた粘土を成形して三軸試験を行うが、どのような角度で実験しても、不変量で整理している限りは、実験結果に影響はない。

また、 $p'$  と  $q$  のそれぞれの意味であるが、応力空間上に、 $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$  という有効応力点があったとしたとき、その応力を表すのに、3つの主応力軸とは別の尺度を導入する。すなわち、 $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$  という静水圧軸を基準として、静水圧軸に  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$  から垂線を降ろし、静水圧軸に平行な成分と、静水圧軸からの距離で、 $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$  を表そうというものである。静水圧軸は3つの軸から常に等距離にあるために、 $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$  と表されるが、原点を固定して3主応力軸を任意に回転しても、静水圧軸の位置は変わらないことは直感的にもわかる。したがって、新たに導入したこの尺度は、座標の取り方に無関係な合理的なものである。平均有効応力  $p'$  は、静水圧軸に沿って、どれだけ等方的な静水圧応力があるのかを示している。また、偏差応力  $q$  は、静水圧軸からどれだけずれているのかを示している。

静水圧軸は、名前の通り、完全に等方的な応力を示しており、粘土の圧縮による体積変化を司る。また、偏差応力は、静水圧軸からのズレであり、このズレが大きいほど、せん断応力が大きくなることを意味する。



## (2) 有効応力径路

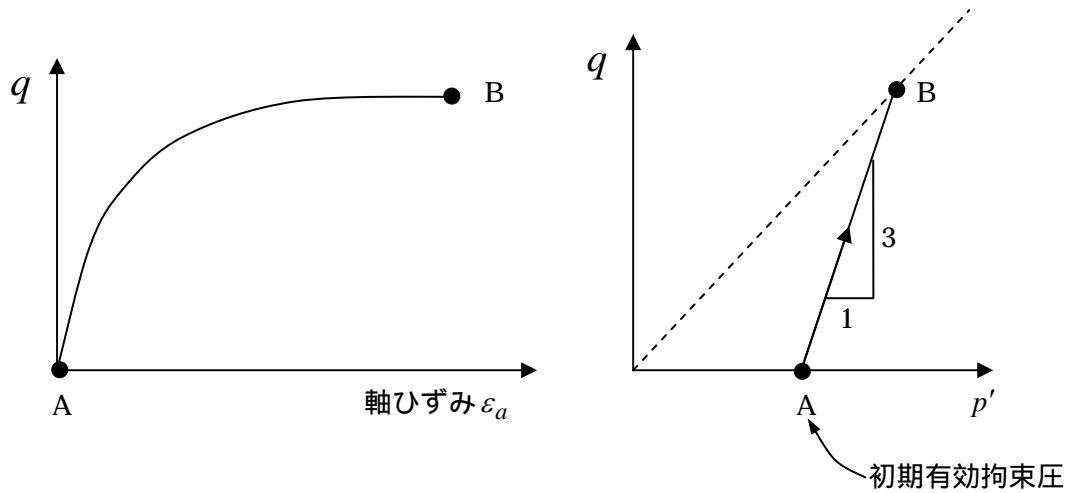
有効応力径路とは、せん断中に平均有効応力  $p'$  と偏差応力  $q$  がどのように変化するのかを記録した図である。CU試験の有効応力径路を調べることにより、実験に用いている粘土の特性を知ることが可能である。

### CD 試験の有効応力径路

排水せん断では、過剰間隙水圧は発生しないので、常に有効応力 = 全応力となる。

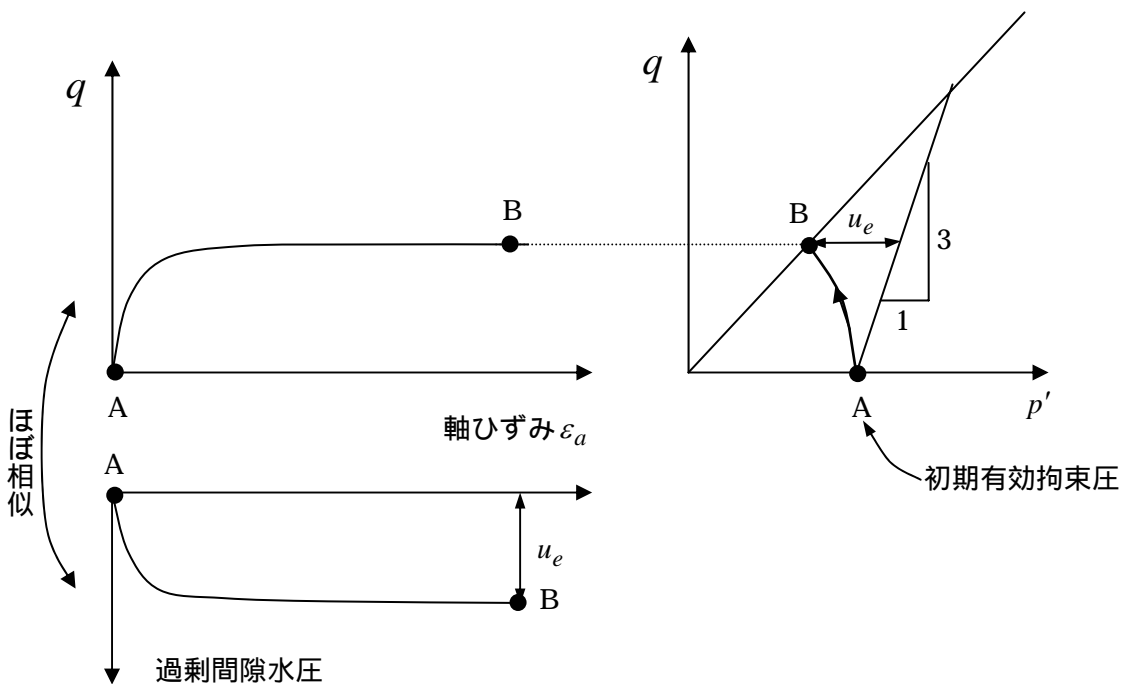
三軸条件では、 $\Delta q = \Delta\sigma'_1 - \Delta\sigma'_3$  ,  $\Delta p' = \frac{1}{3}(\Delta\sigma'_1 + 2\Delta\sigma'_3)$  となるので、

$\frac{\Delta q}{\Delta p'} = \frac{3(\Delta\sigma'_1 - \Delta\sigma'_3)}{\Delta\sigma'_1 + 2\Delta\sigma'_3}$  となるが、通常  $\Delta\sigma'_3 = 0$  であるので、結局、 $\frac{\Delta q}{\Delta p'} = 3$  となる。図示すると、



### CU 試験の有効応力径路

非排水せん断中に、過剰間隙水圧が発生する。そのため、正規圧密粘土の場合、有効応力径路は 1:3 の勾配を持つ全応力径路から、徐々に左側にずれてくる（過圧密粘土の場合は、負の過剰間隙水圧が発生すると全応力径路より右にずれる）。また、正規圧密粘土の場合は、偏差応力 ~ 軸ひずみの関係と、過剰間隙水圧 ~ 軸ひずみの関係はほぼ相似形になることが知られている。過剰間隙水圧の発生量については次節で述べる。



### (3) スケンプトンの間隙圧係数

スケンプトン(Skempton)は、間隙水圧の変動量を次のように表した。

$$\Delta u = B\{\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)\}$$

水を非圧縮として、粘土が完全に飽和しているとすれば、上式の  $B$  は 1 となる。したがって、

$$\Delta u = \Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$$

通常の三軸圧縮試験では、 $\Delta\sigma_3 = 0$  であるので、右辺第 1 項目の  $\Delta\sigma_3$  による効果は、特殊な試験条件か、UU 試験のように非圧密条件で  $\Delta\sigma_3$  を载荷するような場合に限る。したがって、通常の CU 試験ならば、

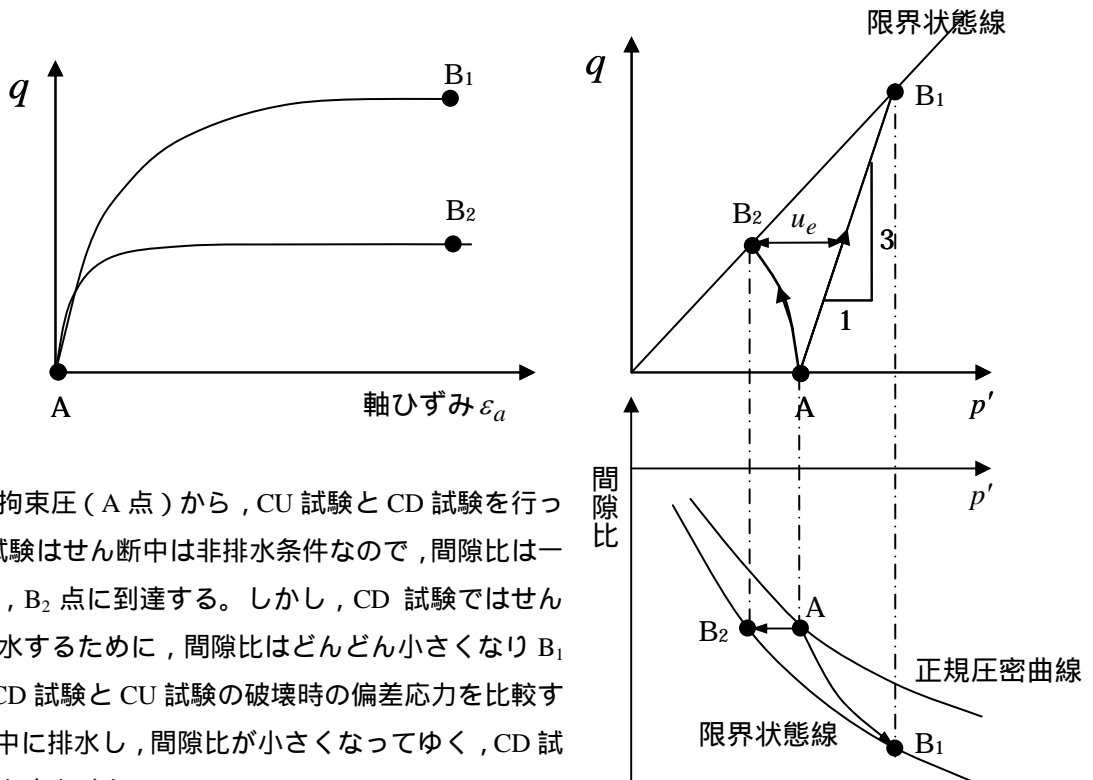
$$\Delta u = A\Delta\sigma_1 = A\Delta q$$

として良い。そうなると、過剰間隙水圧が  $q$  と相似形であると考えてイメージしやすい。

実験等で明らかになっている破壊時の間隙圧係数  $A$  の具体的な値は次の通りである。

正規圧密粘土	0.5 ~ 1.0
締固めた砂質粘土	0.25 ~ 0.75
やや過圧密な粘土 (軽過圧密粘土)	0 ~ 0.5
非常に過圧密な粘土 (重過圧密粘土)	0.5 ~ 0

### (4) CU 試験と CD 試験の比較



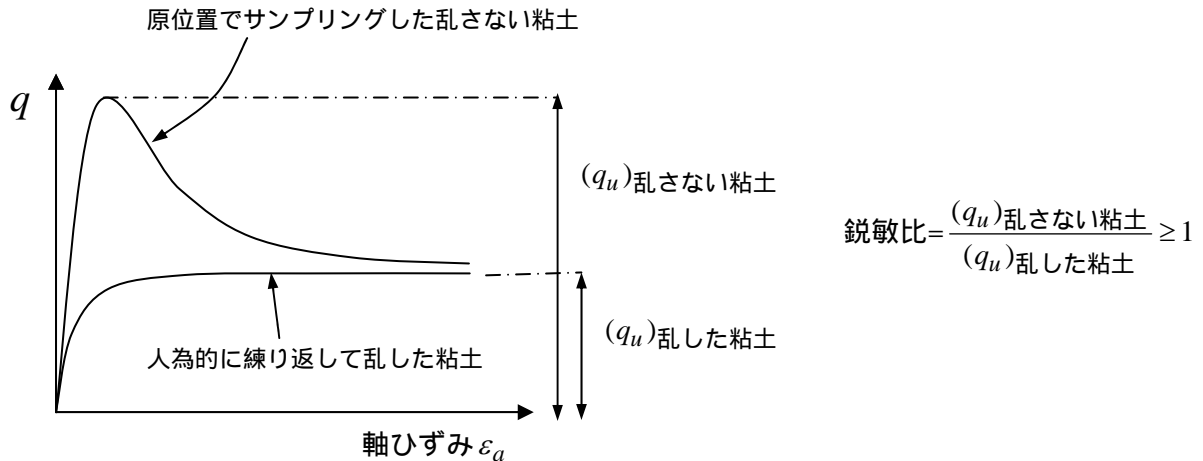
同じ初期有効拘束圧 ( $A$  点) から、CU 試験と CD 試験を行ったとする。CU 試験はせん断中は非排水条件なので、間隙比は一定のままであり、 $B_2$  点に到達する。しかし、CD 試験ではせん断中に粘土は排水するために、間隙比はどんどん小さくなり  $B_1$  点に到達する。CD 試験と CU 試験の破壊時の偏差応力を比較すると、せん断途中で排水し、間隙比が小さくなってゆくと、CD 試験の方が、ずっと大きくなる。

なお、右図の右上の有効応力径路で見ても、右下の間隙比 ~ 有効応力関係で見ても、最終時の  $B_1$  点と  $B_2$  点は同じ線上にある。この線は、粘土の限界状態 (破壊状態) を表すもので、限界状態線と呼ばれている。

(5)土のせん断強度に関するその他の話題

自然堆積粘土のせん断強度

自然堆積粘土を一軸圧縮試験すると、明確なピーク強度を持った応力～ひずみ曲線が得られる。しかし、その粘土を人為的に練り返して、乱してから再び一軸圧縮試験を行うと、ピーク強度を持たず、せん断強度は非常に小さくなる。この強度の比を鋭敏比といい、鋭敏比が大きい粘土を、鋭敏な粘土と呼ぶ。

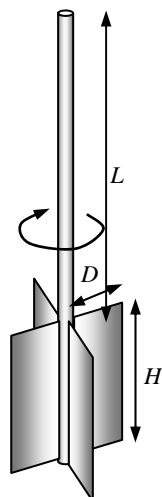


原位置で行うせん断試験

一面せん断試験、一軸圧縮試験、三軸圧縮試験は、原位置でサンプリングしてきた粘土を実験室の中で試験を行うものであったが、現場で行うせん断試験もある。

代表的なものが、コーン貫入試験やベーンせん断試験である。コーン貫入試験とは、円錐状のコーンを地盤に貫入させることにより、その抵抗値から地盤のせん断強度を推定するものである。過去のデータの集積により、経験的に非排水せん断強度  $c_u$  との関係式が提案されている。

ベーンせん断試験は欧米をはじめとする海外で多く用いられているが、日本では一軸圧縮試験の方が一般的である。ベーンせん断試験とは、図のように4枚の羽根（ベーンプレート）がついたものを地盤内に押し込み、回転させることによって、回転トルクから地盤のせん断強度（ベーンせん断強度）を計測するものである。ベーンせん断強度と非排水せん断強度  $c_u$  との関係の経験式も提案されている。



- ベーンプレート
- 高さ(H) 150mm or 100mm
- 幅(D) 75mm or 50mm
- ベーンシャフト
- 長さ(L) 750mm or 500mm