

【全応力, 有効応力, 間隙水圧】

0. 応力について:

「土の圧縮と圧密」の単位では、一次元の力学に限定して議論する。多次元の力学は「強度と破壊理論」以降で取り扱い、応力についてもそこでもう一度本格的に学ぶ。したがって、この単元での応力（圧縮を正）は、図1のように定義されるものであり、単位面積当たりの力とほぼ等価であると考えてよい。

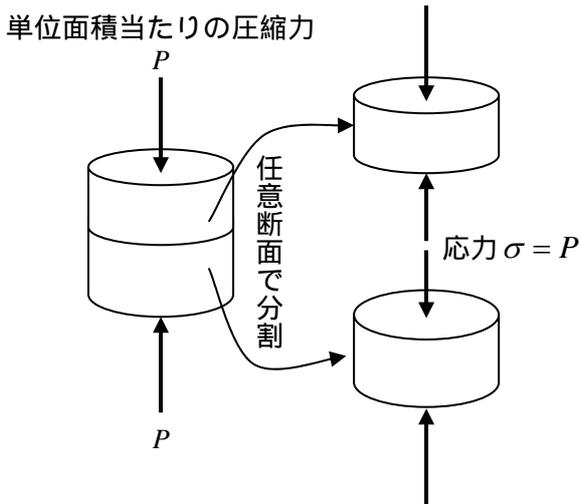


図1

正確には、応力  $\sigma$  は位置  $z$  のスカラー関数  $\sigma(z)$  であり、位置  $z$  の任意断面には、断面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  をかけたベクトル  $\mathbf{t} = \sigma(z) \cdot \mathbf{n}$  が作用している。この  $\mathbf{t}$  が応力ベクトルと呼ばれるもので、外力と釣り合う。  $\sigma(z)$  はスカラー量であり、力のようなベクトル量では無いことに注意する。しかし、便宜的には左図のように、  $\sigma$  をベクトルのように矢印で示すことがよくある。  
 (多次元の場合は、  $\sigma$  はスカラー量を成分に持つテンソル量となる。これについては、「強度と破壊理論」で詳細に説明する)

1. 有効応力の原理 (Terzaghi テルツァギー)

$$\sigma = \sigma' + u$$

全応力 = 有効応力 + 間隙水圧

全応力 : 上で説明したような外力と釣り合う普通の応力。土質力学では、有効応力と間隙水圧に分割して考える場合には、わざわざ「全(total)」をつけて全応力(total stress)と呼ぶ。外力との釣り合いから計測することが可能。

間隙水圧: 飽和土中の水圧。マンメータ(後述)を挿入して直接計測することが可能。

有効応力: 全応力から間隙水圧を差し引いた応力。詳細はこれから説明。

2. 飽和土の水中単位体積重量の再考察

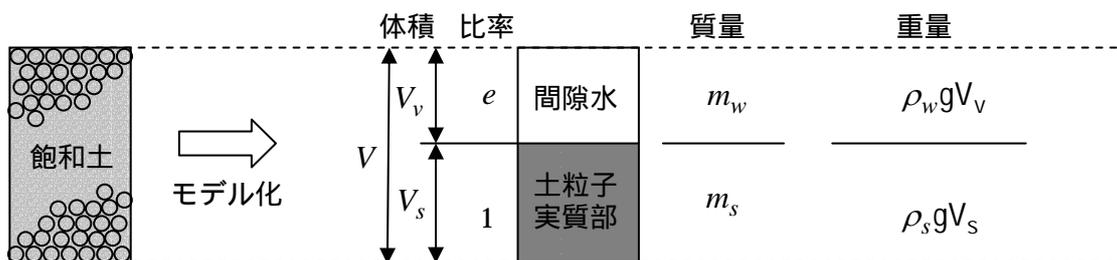


図2

飽和土全体(tatal)の単位体積重量は

$$\gamma_t (= \rho_t \cdot g) = \frac{\rho_s g V_s + \rho_w g V_v}{V_s + V_v} = \frac{\gamma_s V_s + \gamma_w V_v}{V_s + V_v} = \frac{\gamma_s + \gamma_w \cdot e}{1 + e} = \gamma_s \left( \frac{1}{1 + e} \right) + \gamma_w \left( \frac{e}{1 + e} \right)$$

飽和土の場合  $\gamma_t = \gamma_{sat}$  であるが、ここでは  $\gamma_t$  のまま書いておく

間隙比  $e$  の代わりに間隙率  $n (= \frac{e}{1 + e})$  を用いれば、

$$\gamma_t = \gamma_s (1 - n) + \gamma_w n$$

となるが、どちらにせよ、 $\gamma_s$ 、 $\gamma_w$  には係数がかついている。

では、係数をとってしまつて、

$$\gamma_t = \gamma' + \gamma_w$$

$\sigma = \sigma' + u$  の形になっていることに注意

と書けば、この  $\gamma'$  はどのような単位体積重量を意味するのか？

(この  $\gamma'$  の考察が、有効応力  $\sigma'$  の考察へ直接結びつく)

実は添え字の  $t$  は wet の  $t$  である。wet の  $w$  にすると、water と一緒になってしまうために  $t$  を用いる。別にどちらでもいい。

2.1 水槽に沈めた飽和土塊の重量 (以下の議論では全部飽和土の話なので  $\gamma_t = \gamma_{sat}$  全(total,  $t$ )の意味を大事にして、あえて  $\gamma_t$  のまま使用している)

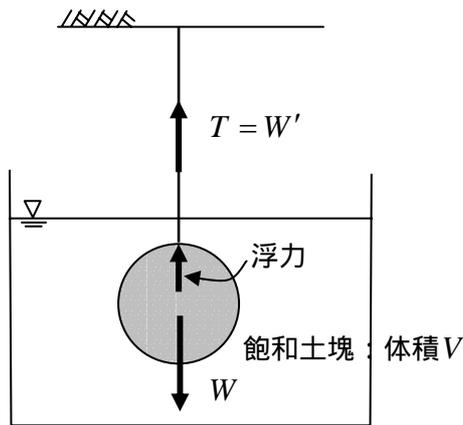


図 3

モデル化

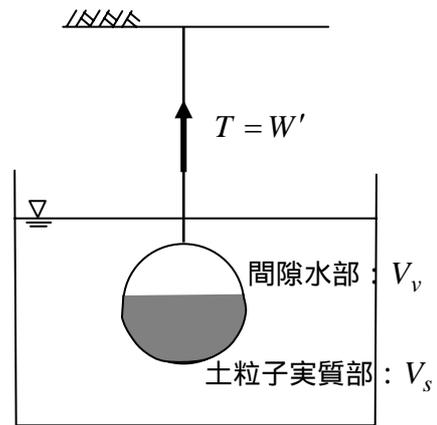


図 4

図 3 のように、飽和土をそのまま袋に詰めて水槽に沈めた場合に、つり下げたヒモに作用する重量  $W'$  は、全重量  $W = \gamma_t V$  から浮力  $\gamma_w V$  を差し引くことにより、

$$W' = \gamma_t V - \gamma_w V = (\gamma_t - \gamma_w) V = \gamma' V \quad \text{よって、} \quad \frac{W'}{V} = \gamma' = \gamma_t - \gamma_w$$

すなわち、 $\gamma'$  は飽和土の水中単位体積重量である。

次に図 4 のように、飽和土が袋の中で間隙水と土粒子実質部 (隙間なし) の状態に完全に分かれたとすれば、つり下げたヒモに作用する重量  $W'$  は、

$$W' = (\gamma_w - \gamma_w) V_v + (\gamma_s - \gamma_w) V_s = (\gamma_s - \gamma_w) V_s$$

↑  
(間隙水の重量は水中ではゼロ)

したがって、単位体積当たりの重量は、

$$\begin{aligned} \frac{W'}{V} &= (\gamma_s - \gamma_w) \frac{V_s}{V} = (\gamma_s - \gamma_w) \left( \frac{1}{1+e} \right) = \frac{\gamma_s}{1+e} - \frac{\gamma_w}{1+e} \\ &= \underbrace{\frac{\gamma_s}{1+e} + \frac{e \cdot \gamma_w}{1+e}}_{\gamma_t} - \underbrace{\frac{e \cdot \gamma_w}{1+e} - \frac{\gamma_w}{1+e}}_{\gamma_w} = \gamma' \end{aligned}$$

つまり、 $\gamma'$  は  $V$  全体に均質に分布する土粒子の集合（隙間あり）を水中で支えている重量である。

結局、飽和土の全重量  $W$  は  $W = \gamma_t V = (\gamma' + \gamma_w) V = \gamma' V + \gamma_w V$  と表され、

- ・  $V$  が全部土（隙間あり）とした時の土の水中での重量  $\gamma' V$  と
- ・  $V$  が全部水とした時の水の重量  $\gamma_w V$  との和となる。

$V$  を全部水、あるいは全部土と考えて重量を定義することが重要

$\gamma'$  は有効単位体積重量とも呼ばれる。

### 3. 全応力、有効応力、間隙水圧

#### 3.1 有効応力は何に対して有効か？

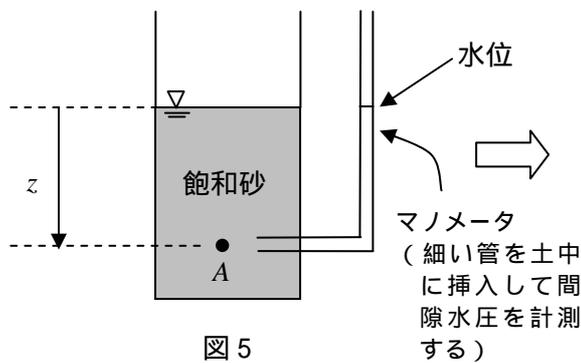


図 5

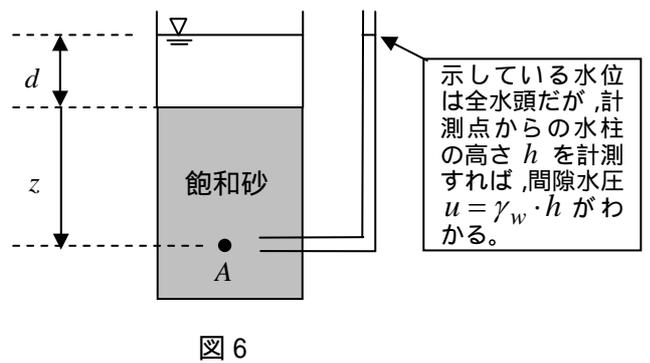


図 6

図 5 のように、飽和砂の中の深さ  $z$  の  $A$  点での応力を調べる。1 次元場なので、ここでの応力は単位面積当たりに作用する力と考えてもまあ良い。

この問題では外力は自重  $\gamma_t$  しか考えていないので、 $A$  点に作用する全応力（すなわち外力と釣り合う応力）は、深さ分の重量が加わっているとして、 $\sigma = \gamma_t \cdot z$  となるが、

$$\begin{aligned} \sigma &= \gamma_t \cdot z = \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot z \\ &= \sigma' + u \end{aligned}$$

ここで、間隙水圧  $u$  はマンメータによって、直接計測することが出来る量であり、 $u = \gamma_w \cdot z$  となるこ

とは自明なので、有効応力  $\sigma'$  が水中単位体積重量  $\gamma'$  を用いて、 $\sigma' = \gamma' \cdot z$  となることがわかる。次に、図 6 のように水位を  $d$  だけ上昇させたとする。直感的に砂には何の変化も起きないことはわかるはず。では、なぜ起きないかを考察する。

水位上昇後の A 点での全応力は、水位分の応力の増加があるので、

$$\begin{aligned}\sigma &= \gamma_t \cdot z + \gamma_w \cdot d \\ &= \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot z + \gamma_w \cdot d = \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot (z + d)\end{aligned}$$

ここで、 $\gamma_w \cdot (z + d)$  は水位上昇後にマンメータで計測される間隙水圧  $u$  に等しいので、結局

$$\sigma = \sigma' + u$$

と書くことができる。

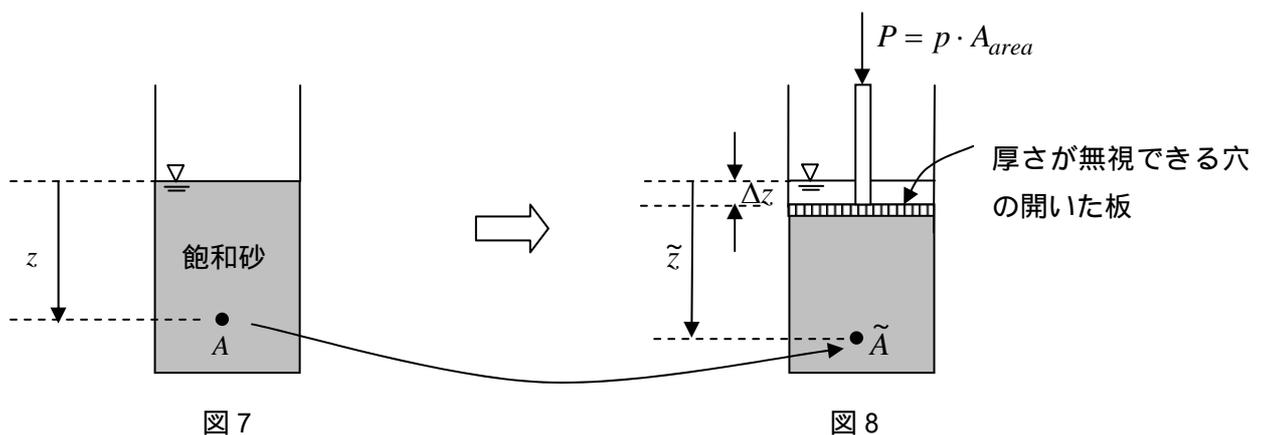
水位上昇前後での有効応力  $\sigma'$  と間隙水圧  $u$  を整理すると、

$$\text{水位上昇前} \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot z \end{cases} \quad \text{水位上昇後} \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot (z + d) \end{cases}$$

結局、水位上昇前後では間隙水圧のみが変化し、有効応力は全く変化していないことがわかる。有効応力が変化しないので、砂には何も変化（変形）が起こらない。

したがって、有効応力  $\sigma'$  の変化のみが、土の変形に有効な応力変化となる。 有効応力の原理

### 3.2 有効応力の変化と土の変形



次に、厚さが無視できる穴の開いた板を介して、飽和砂を  $p$ （単位面積当たり）の力で圧縮する。この場合に砂に変化が生じる（すなわち圧縮する）ことは直感的にわかるはず。

この時の応力状態を調べる。

載荷前（すなわち図 7 の状態）での深さ  $z$  での応力状態は 3.1 の例題と同じ。すなわち、

$$\sigma = \gamma_t \cdot z = \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot z = \sigma' + u$$

載荷後（すなわち図8の状態）での深さ  $z$  での全応力  $\sigma$  は、

$$\begin{aligned}\sigma &= \tilde{\gamma}_t \cdot (z - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z = \tilde{\gamma}' \cdot (z - \Delta z) + \gamma_w \cdot (z - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z \\ &= \tilde{\gamma}' \cdot (z - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot z\end{aligned}$$

ここに、 $\tilde{\gamma}_t$  および  $\tilde{\gamma}'$  は、それぞれ圧縮により砂が詰まった効果を考慮した飽和単位体積重量および水中単位体積重量。

また、 $\gamma_w \cdot z$  は間隙水圧  $u$  であることは自明なので、深さ  $z$  における有効応力  $\sigma'$  は、

$$\sigma' = \tilde{\gamma}' \cdot (z - \Delta z) + p$$

となる。

もし、 $\Delta z = 0$  すなわち、圧縮量が無視できるほど小さいと仮定できれば、単位体積重量も変わらず  $\tilde{\gamma}' = \gamma'$  となり、結果として上の式は

$$\sigma' = \gamma' \cdot z + p$$

となり、載荷重  $p$  の分だけ有効応力  $\sigma'$  が増加するので砂は変形したと議論することができ、簡単である。大筋はこれで良いのだが、土は実際圧縮するので、もう少しだけ厳密に議論する必要がある。

載荷による圧縮によって、 $A$  点は深さ  $\tilde{z}$  の  $\tilde{A}$  点に移動するので、その点での応力状態を調べる

$\tilde{A}$  点での全応力は

$$\begin{aligned}\sigma &= \tilde{\gamma}_t \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z = \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + \gamma_w \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \Delta z \\ &= \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p + \gamma_w \cdot \tilde{z}\end{aligned}$$

$\gamma_w \cdot \tilde{z}$  がマノメータで計測できる間隙水圧  $u$  であることは明らかなので、 $\tilde{A}$  点で有効応力  $\sigma'$  は

$$\sigma' = \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z) + p$$

ここで、圧縮前後の土の領域での質量保存を考慮すれば、 $\gamma'$  と  $\tilde{\gamma}'$  の間の関係は、

$$\gamma' \cdot z = \tilde{\gamma}' \cdot (\tilde{z} - \Delta z)$$

であるため、結局

$$\sigma' = \gamma' \cdot z + p$$

となり、やはり載荷重  $p$  の分だけ有効応力が増加したために、土は変形（圧縮）した。

載荷前後における同じ土の点（すなわち  $A$  点と  $\tilde{A}$  点）での有効応力  $\sigma'$  と間隙水圧  $u$  を整理すると、

$$\text{載荷前} \quad \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot z \end{cases} \quad \text{載荷後} \quad \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z + p \\ u = \gamma_w \cdot \tilde{z} \end{cases}$$

以上で重要なことは、圧縮を考慮したところで、着目している土の有効応力は、圧縮量を無視した場合と同じ結果となることである。

したがって、地盤内の応力状態の変化を議論する場合には、(最も重要な有効応力に関する結果は同となるから) 圧縮量を無視する人が多いので注意する。

#### 4. 粘土の圧密

3.2 の例題では、荷重される土が「飽和砂」だったために、圧縮は瞬時に終わった。しかし、土が「飽和粘土」だったら、どのようなことが起こるか？

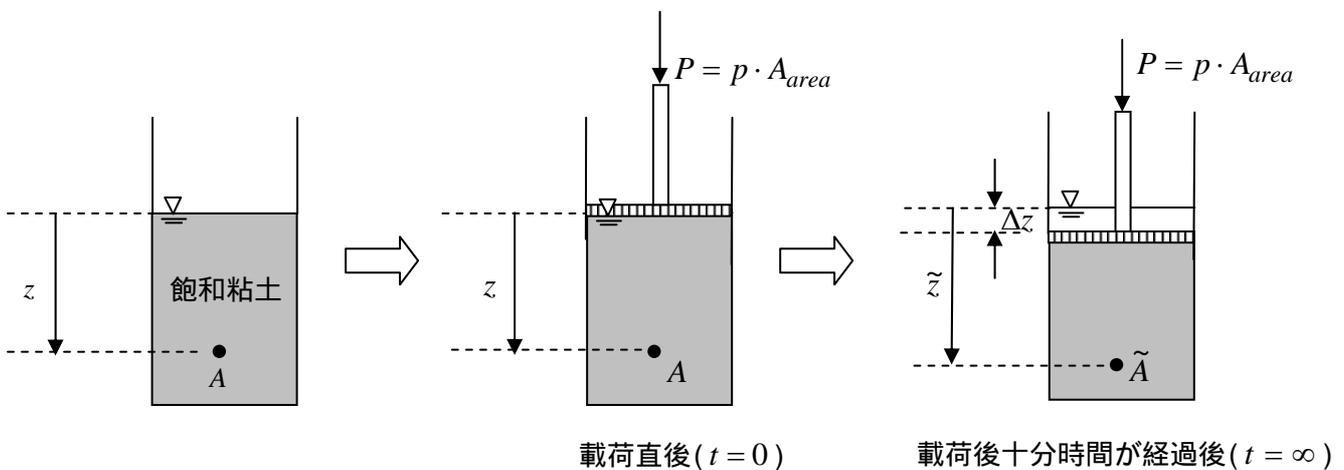


図 9

粘土の透水係数は非常に小さいために、排水に時間を要する。そのため、荷重直後には全く圧縮(変形)は生じないが、時間の経過とともに徐々に圧縮し、最終的に  $t = \infty$  において、前例 3.2 の砂と同様の応力状態となる。

したがって、荷重前後における同じ土の点(すなわち A 点と  $\tilde{A}$  点)での有効応力  $\sigma'$  と間隙水圧  $u$  を整理すると、

$$\text{荷重前} \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot z \end{cases} \quad \text{荷重直後} \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z \\ u = \gamma_w \cdot \tilde{z} + p \end{cases} \quad t = \infty \begin{cases} \sigma' = \gamma' \cdot z + p \\ u = \gamma_w \cdot \tilde{z} \end{cases}$$

荷重直後には変形が生じないので、有効応力の変化も無いと考える。その際、荷重重  $p$  による全応力の増分は、すべて間隙水圧の増分となる。

このような、粘土の透水性の低さに起因する、時間遅れの圧縮変形を「圧密」と呼ぶ。

上の粘土の(圧密)問題においては、全応力位置  $z$  のみの関数で時間には無関係(すなわち一定)であったが、有効応力と間隙水圧は、位置  $z$  とともに、時間  $t$  の関数になることに注意する。 圧密理論で詳しく説明する。

## 5. 地盤内の応力分布

今までの3の例でも4の例でも、地盤内のある点での応力について議論したが、地盤内の応力分布はどうなっているのか？

図5および図6の例では、深さ  $z$  の点での全応力は、

$$\text{水位上昇前 } \sigma = \gamma_t \cdot z, \quad \text{水位上昇後 } \sigma = \gamma_t \cdot z + \gamma_w \cdot d$$

となっていたが、これは任意の深さ  $z$  での全応力と考えて良く、図10のような直線分布となる。

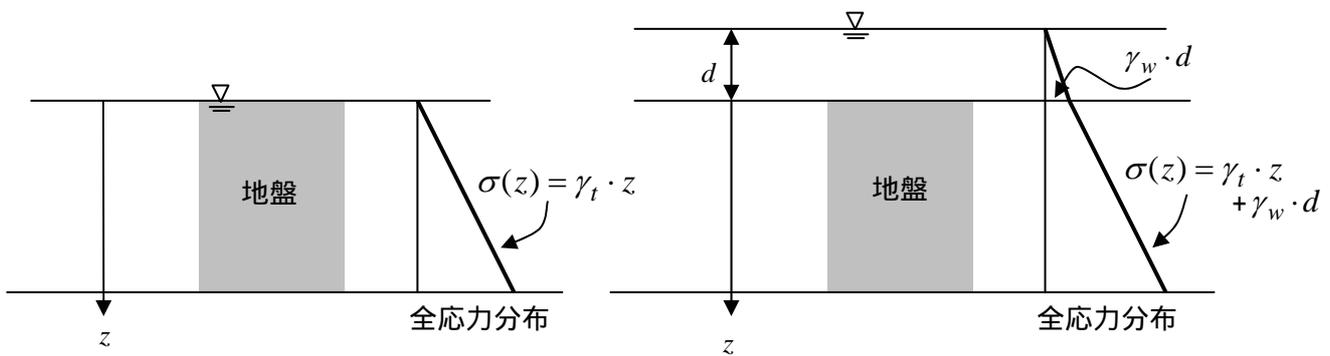


図10

さらに詳細な議論は、力の釣り合い式から考える必要がある。

1次元の力の釣り合い式は、図11のように自重が作用するとして微小距離  $dz$  での全応力増分を求め、力の釣り合いを考えれば

$$\left( \sigma(z) + \frac{d\sigma}{dz} dz \right) - \sigma(z) = \gamma_t \cdot dz$$

すなわち、力の釣り合い式は次式となる。

$$\frac{d\sigma}{dz} = \gamma_t$$

地盤内の全応力分布を求めるには、 $z$  で積分すれば、

$$\sigma(z) = \gamma_t \cdot z + C$$

となり、直線分布となることは明らかである。

図10の水位上昇前の場合には、境界条件が  $\sigma(0) = 0$  であるので、 $C = 0$  である。

水位上昇後の場合には、境界条件が  $\sigma(0) = \gamma_w \cdot d$  であるので、結果として

$$\sigma(z) = \gamma_t \cdot z + \gamma_w \cdot d$$

となる。

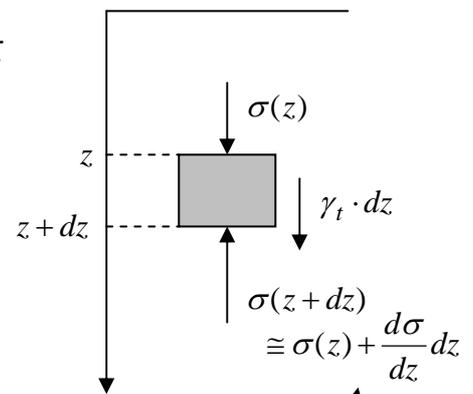


図11

テラー展開

地盤内の応力分布を求めるポイント

自重が作用する1次元場での全応力分布は直線分布となる。(地層毎に $\gamma_t$ が異なれば、地層毎に直線の勾配は異なり、折れ線の分布図になる)

間隙水を含む土全体の単位体積重量 $\gamma_t$ (飽和土の場合 $\gamma_{sat}$ )は計測可能(既知の値)であるので、全応力分布は必ず求められる。

十分時間が経過している状態(定常状態)の間隙水圧分布は既知である(通常は直線の静水圧分布をしている)

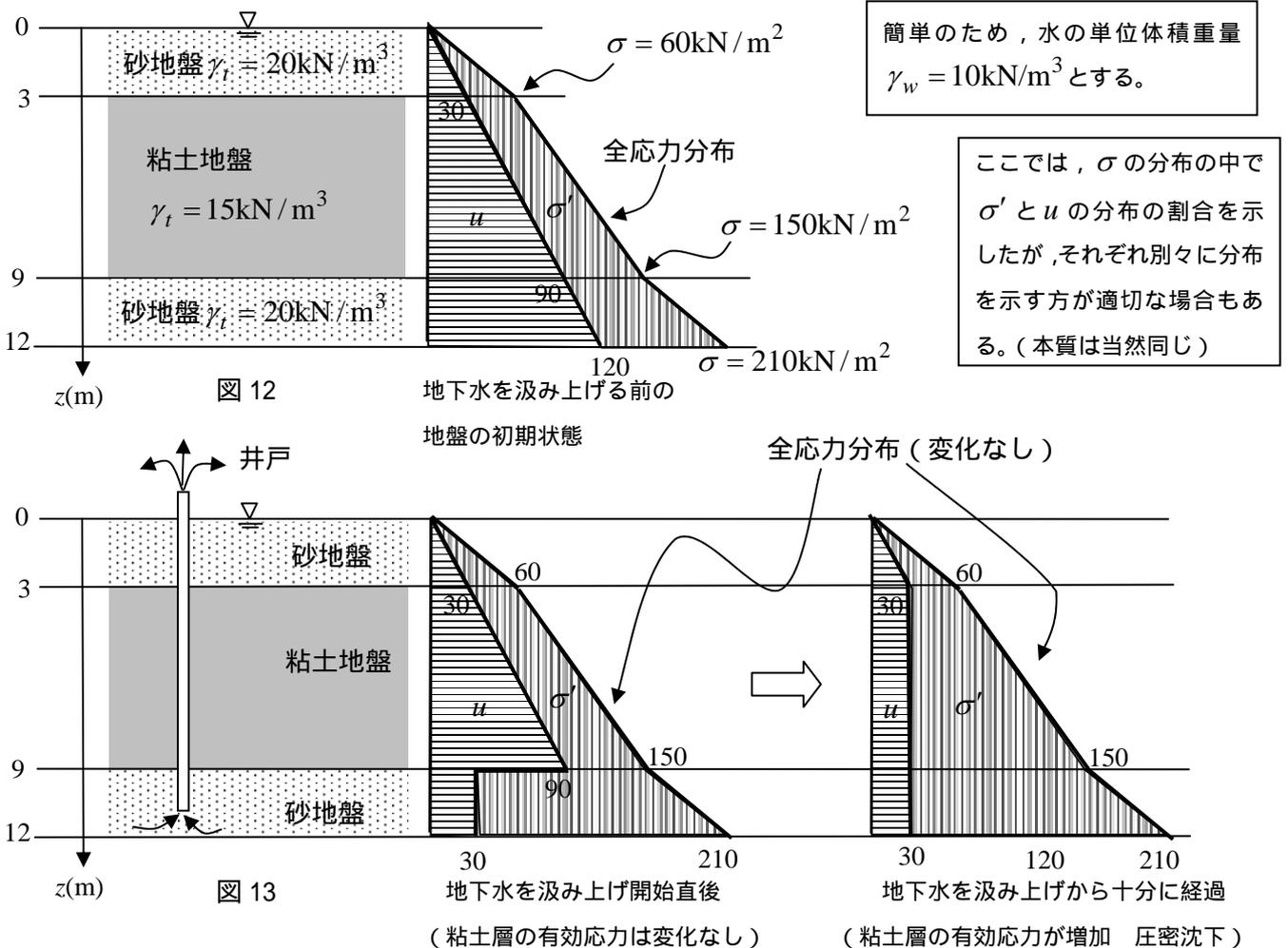
全応力分布と間隙水圧分布より、有効応力分布が求められる。

砂地盤は透水係数が大きいので、瞬時に吸排水して圧縮(あるいは膨張)が起こりうる。すなわち、有効応力の変化が瞬時に起こる(と考えるも良い)。

粘土地盤は透水係数が小さいため、吸排水には時間を要し、すぐには圧縮(あるいは膨張)などの変形はしない。すなわち、載荷直後には有効応力の変化はない(と考える)。

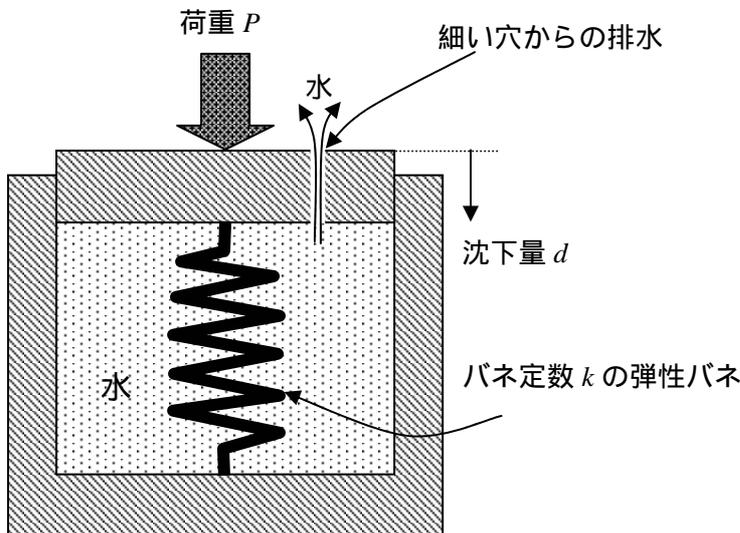
例題(地下水くみ上げによる地盤沈下)

図12のような地盤があり、最下層の砂層には静水圧の地下水がある。今、その砂層から図13に示すように井戸で地下水を大量に汲み上げたとき、最下層の砂層の間隙水圧が $30\text{kN/m}^2$ まで低下させたとする。その時の、地下水汲み上げ開始直後と汲み上げ続けて $30\text{kN/m}^2$ に維持したまま十分時間が経過した時の、地盤内の全応力、有効応力、間隙水圧分布を示しなさい。



【圧密の単純化モデルと実際の粘土の「バネ」】

(1) 圧密のモデル化



(一次元弾性) 圧密を説明するのに必ず使用されるモデル

(仮定)

1. 箱の中は弾性バネ(土骨格)と水(間隙水)だけ
2. 水は非圧縮(もちろんバネも)
3. 箱の外とは小さな穴があるのみで水の出入りには時間がかかる(=粘土の透水性は低い)
4. 有効応力(土骨格が受け持つ力) = バネの弾性力

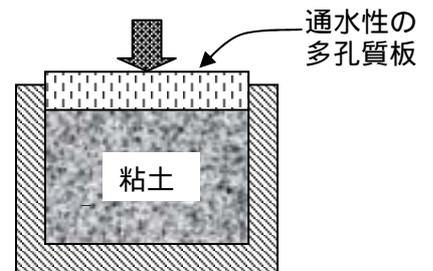
	荷重直後	荷重から十分に時間経過
全応力増分	$p (= P / A)$	$p$
間隙水圧増分	$p$	0
有効応力増分	0	$p (= k \cdot d / A)$

荷重した場合、バネが縮むためには、箱から水が出なければならぬ(水は完全に非圧縮であると仮定している)。しかし、水が出るための穴は非常に小さいために、すぐには外に出ることが出来ない。水が外に出て行かないということは、バネは縮まない(すなわち全く力が加わっていない)ということなので、荷重直後の状態では、水が荷重のすべてを支えている(すなわち、全応力増分と水圧増分が釣り合っている)ことになる。

時間の経過とともに、徐々に穴から水が抜けてゆくことにより荷重盤は沈下してバネが縮むが、縮むことによってバネが新たに受け持つ荷重の分だけ、水圧増分は減少する。

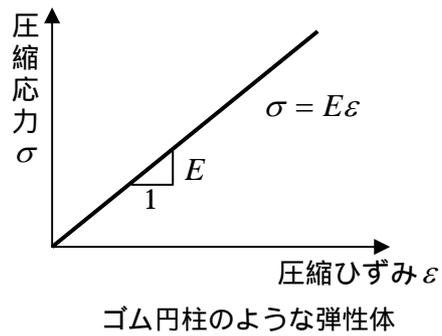
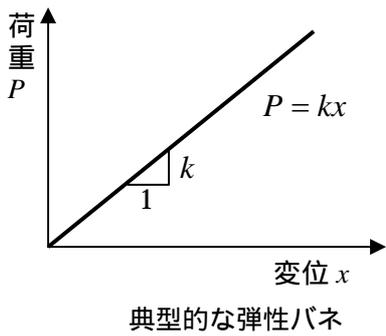
最終的に、全荷重分を受け持つだけバネが縮んだ時に、水圧増分はゼロに戻り、沈下は止まる。

注意：箱にバネの代わりに有限な厚さの粘土が入っているとしたら、水が抜けるのにフタの穴だけが抵抗になるわけではなく、(間隙のスミマを流れるために)粘土の至る所に抵抗があるので、間隙水圧は一樣ではなく、ある分布をもつ。しかし、厚さが無視できる小さな土要素と考えれば、十分粘土の「弾性」圧密を表現していると言える。



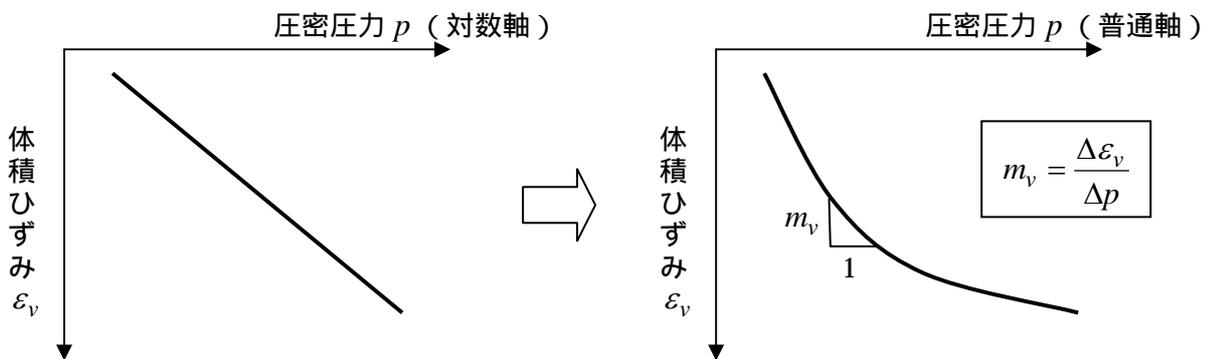
このモデルでは、土骨格を弾性バネで表現している。では、実際の土はどのような「バネ」を持つのか？

(2)土骨格の「バネ」はどんなバネ？



上の図の例は本当の弾性体である（ただし、各諸量は自然状態からの増分で定義）  
では土の場合を考えるため、上の図を 90 度時計回りに回転させる

その際、圧縮ひずみは体積ひずみ（圧縮を正）、圧縮応力は圧密圧力と読み替える。ここでは、一次元の圧密のみを考えるので、沈下量から求められる「ひずみ」は「体積ひずみ」である。また、圧密圧力  $p$  を用いる場合は、その  $p$  に対してのひずみと間隙比は完全に圧密が終了している（間隙水圧増分がゼロに戻っている）段階での値であることが前提である。要するに、 $p$  は有効応力である。



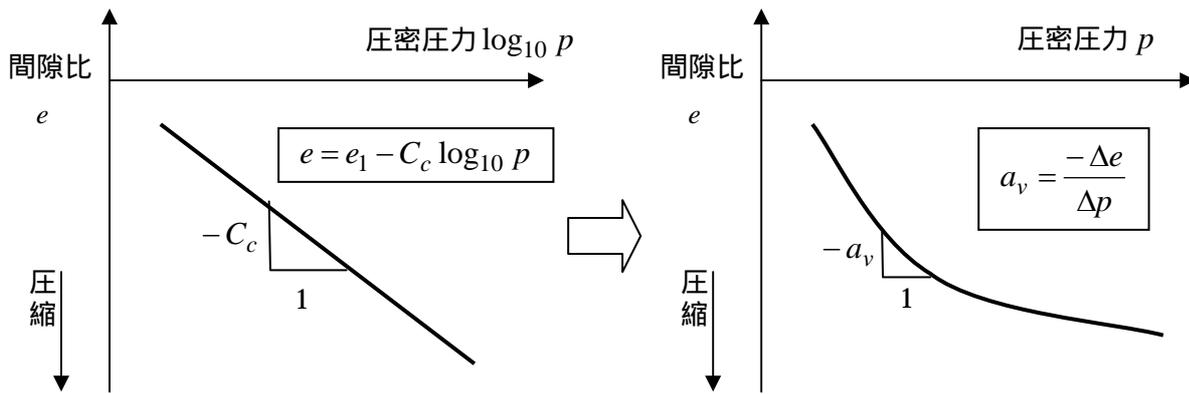
一見、上と同じ弾性体に見える。しかし、よく見ると横軸は対数軸(  $\log_{10} p$  )であることに注意する。

横軸は普通軸にすると当然直線では無くなる。この曲線の接線勾配を  $m_v$  : 体積圧縮係数と呼ぶ。当然、曲線のどの部分か（すなわち  $p$  の値）によって値は変わる。

土の体積変化は、体積ひずみ  $\epsilon_v$  よりも間隙比  $e$  の変化で表す方が一般的である。なぜなら、土は圧縮曲線が曲線になることからわかるように、その時々  $e$  の値によって土自身の性質（圧縮性や強度等）が異なり、 $e$  自身が重要な情報であるからである。

縦軸の体積ひずみを間隙比に替える。 
$$\epsilon_v = \frac{-(V - V_0)}{V_0} = \frac{-(e - e_0)}{1 + e_0}$$

（上式で、分子に - が付くのは、体積ひずみを圧縮を正で定義するため。）



$e \sim \log_{10} p$  関係の勾配を圧縮指数  $C_c$  と呼ぶ。  
 $e \sim \log_{10} p$  関係 (圧縮曲線) は、圧密圧力の広い範囲にわたって直線で近似できることから、大きな荷重増分に対しての圧密沈下量の予測に重用されることが多い (後で詳述する)。

この曲線の接線勾配を  $a_v$  : 圧縮係数と呼ぶ。  
 $m_v$  と同様に曲線のどの部分か (すなわち  $p$  の値) によって値は変わる。

$a_v$  と  $m_v$  との関係は、

$$\varepsilon_v = \frac{-(e - e_0)}{1 + e_0} \text{ より } \Delta\varepsilon_v = \frac{-\Delta e}{1 + e_0} \text{ となるので、これを } m_v = \frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta p} \text{ に代入すると、}$$

$$m_v = \frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta p} = \frac{-1}{1 + e_0} \frac{\Delta e}{\Delta p} = \frac{1}{1 + e_0} a_v \text{ となる。}$$

ひずみも間隙比も圧密圧力  $p$  に対して非線形となっているので、上式の初期間隙比  $e_0$  は、圧密圧力増分  $\Delta p$  を与える直前の粘土の間隙比としなければならない。

$m_v$  は  $p$  の大きさのレベルによって異なる係数であるが、载荷する圧密圧力増分  $\Delta p (= dp)$  が微小である区間で考えれば、

$$d\varepsilon_v = m_v \cdot dp$$

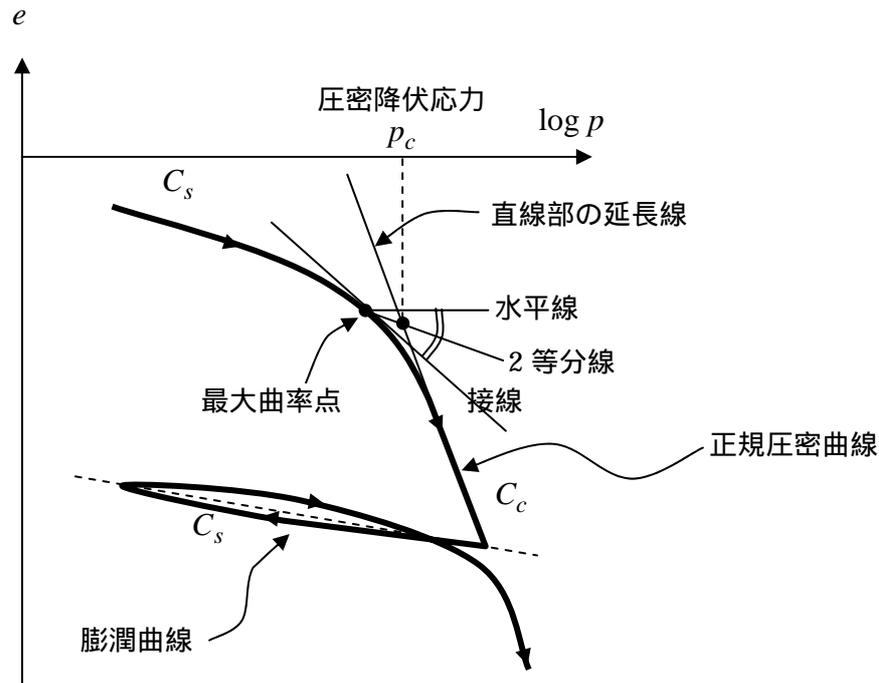
一次元なので、 $d\varepsilon = m_v \cdot dp = m_v \cdot d\sigma'$  と表すことができ、一見、フックの法則に従う普通の弾性体のようになる。(この関係を Terzaghi の弾性圧密理論で用いる)

$m_v$  は体積弾性係数  $K$  の逆数となっており、圧力の逆数の次元である。

### 弾性係数と圧縮係数

弾性係数	体積圧縮係数
硬い材料ほど大きい 変形しやすい材料ほど小さい	軟らかい材料ほど大きい 圧縮 (変形) しやすい材料ほど大きい
例: $E$ (ヤング率): $d\sigma = E \cdot d\varepsilon$ $G$ (せん断弾性係数): $d\tau = G \cdot d\gamma$ $K$ (体積弾性係数): $d\sigma_m = K \cdot d\varepsilon_v$ (土に用いるなら応力は有効応力とする)	例: 一次元では $d\varepsilon = m_v \cdot dp (= m_v \cdot d\sigma')$ 多次元では $d\varepsilon_v = m_v \cdot d\sigma_m'$ (土を想定して有効応力で記述)
SI 単位: $\text{kN/m}^2 (= \text{kPa}), \text{MN/m}^2 (= \text{MPa})$	SI 単位: $\text{m}^2 / \text{kN} (= \text{kPa}^{-1}), \text{m}^2 / \text{MN} (= \text{MPa}^{-1})$

(3) 圧縮曲線( $e \sim \log p$  曲線)は本当に直線か？



実際の粘土を現地から採取（サンプリング）してきて「圧密試験」を実施すると、圧縮曲線（図の太線）が得られるが、よく観察すると大きく分けて2つの勾配の直線部があることに気が付く。（なぜ、2つの直線部に分かれているのかについての考察は配付資料3にて詳述する）

通常の標準圧密試験で得られる圧縮曲線は、数力所選んだ各荷重段階において、一定荷重を載荷した時の圧縮量から得られた数点のデータをつなぎ合わせて描かれたものである。しかし、最近では非常にゆっくりと載荷重を増やしていき、連続して圧縮量を計測する圧密試験も行われるようになった。（後日の圧密試験の講義でまた詳細を述べる）

初期の荷重段階では緩やかな勾配で圧縮するが、そのうちに急に圧縮量が大きくなり勾配の大きな直線、すなわち「正規圧密曲線」となる。この勾配が変わる境界での圧密圧力を特別に「圧密降伏応力  $p_c$  」と呼ぶ。しかし、自然の粘土ではこの境界を見極めるのは非常に難しいので、機械的に誰でもそこそこの値が求められるような方法が色々と提案されている。最も有名なのは、(Casagrande カサグランデ)の方法である（具体的に上の図に示してあるので参照のこと）。

正規圧密および正規圧密曲線は、その土が未経験の荷重で圧縮されているという意味を込めて、歴史的に処女圧縮および処女圧縮曲線 (Virgin Compression line の和訳) とも呼ばれている。これは、処女航海、処女地の類であるが、現代日本ではあまり使われなくなった。

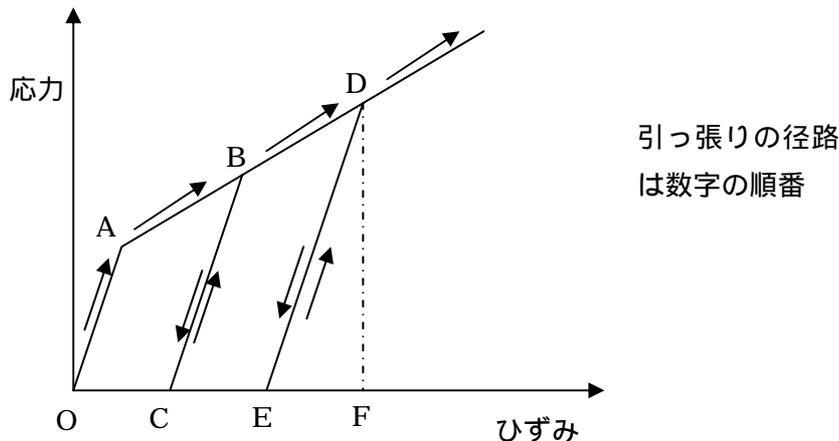
【正規圧密粘土と過圧密粘土】

(1)弾塑性材料の挙動

まず、鉄の棒の単純引張試験を考える。



縦軸に応力 (ここでは、引張り荷重を棒の断面積で割ったもの)、横軸にひずみ (ここでは、引っ張りによって伸びた量を初期の長さで割ったもの)のグラフを描くと下図のようになる。(ただし、かなり単純化している。)



まず、O 点から引っ張り始めるが、A 点を過ぎると棒の剛性は急に小さくなる。剛性が小さくなるということは、言い方を変えれば、同じ力で引っ張ったときに、伸びる量が大きいうことである。この A 点を降伏点と呼び、弾性しか示さない領域と塑性を示すようになる領域の境界を示す。弾性とは、力を加えたことによって変形した物体が、力を抜いたときに完全に元に戻る性質を言う(可逆性)。また、塑性とは、力を抜いても元には戻らず、残留変形がある性質を言う(非可逆性)。この例で説明すると、A 点までは、棒を伸ばしても、力を抜けば O 点に戻るが、A 点を越えて例えば B 点まで伸ばしてしまうと、力を抜いても C 点にしか戻らない。結局、元には戻れない OC 間の残留ひずみ(塑性ひずみ)が現れる。次に、C 点から再び引っ張り始めると、今度は B 点までは弾性挙動をし、B 点を越えると塑性が現れる。要するに、過去に受けた荷重を鉄棒は覚えており、そこまでは弾性変形をすることになる。結局 D 点まで棒を伸ばした場合、力を抜けば E 点に戻るの、全ひずみ量 (OF 間) に対して、塑性ひずみが OE であり、弾性ひずみが EF となる。

以上から重要な点を 2 つピックアップすると。

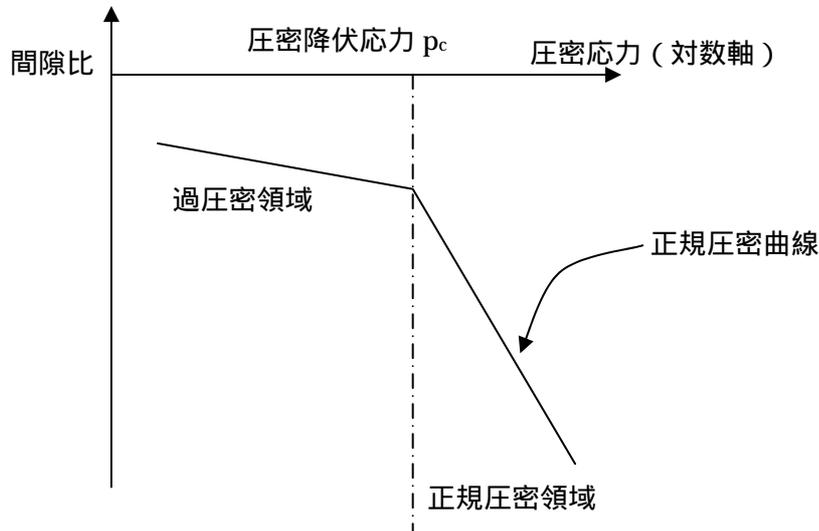
過去に経験した荷重までは弾性変形をするが、それ以上になると塑性変形もするようになる。

同じ荷重を加えた場合、弾性変形より塑性変形の方が大きい。

次に以上の話を粘土の圧縮挙動に当てはめてみる。

## (2) 粘土の圧縮挙動

鉄棒のグラフを 90 度時計回りに回転して、横軸を応力（ただし、対数軸）、縦軸を間隙比（ひずみと等価）とすると、おなじみの  $e - \log p$  曲線（圧縮曲線）となる。なお、曲線というのは、対数軸ではなく、普通軸で描くと曲線になるからである。また、間隙比は圧縮するほど小さくなるので、大きくなることを意味する矢印の向きは上向きにしてある。



通常、圧密試験を行った場合、上図のような圧縮曲線が得られる。圧密降伏応力までの圧縮量の小さい領域を過圧密領域と呼び、圧密降伏応力を過ぎてからの圧縮量が大きくなる領域を正規圧密領域と呼ぶ。圧密降伏応力は、その粘土が過去に受けたことのある最大の荷重（応力）である。大きな地殻変動を受けておらず、比較的新しい水平に堆積した成層粘土地盤は、正規圧密粘土地盤であることが多い。すなわち、現在までの地盤が形成されてきた過程では、ある位置の粘土にとっては、それより上に堆積する地層は増える一方であるため、現在の「有効土被り圧」が過去に受けた最大荷重となっている。そのような、正規圧密粘土地盤からサンプリングしてきた粘土で実験した場合には、圧密降伏応力は、その粘土をサンプリングした場所の「有効土被り圧」とほぼ同じ値となる。地中にあった粘土をサンプリングしてきて実験するのだから、実験時には応力解放されて荷重はゼロになっているため、地中で眠っていた状態の「有効土被り圧」（＝圧密降伏応力）までは弾性変形をするが、それを越えると塑性変形が大きくなって沈下が大きくなる。

ところが圧密試験をすると、サンプリング位置での「有効土被り圧」よりも大きな圧密降伏応力を示す粘土がある。このような粘土を過圧密粘土と呼ぶ。過圧密粘土は、地盤形成の長い歴史の中で、断層、褶曲等の地殻運動後に上部地層が浸食されたり、あるいは氷河期に厚い氷河が載っていたために大きな荷重を受けていたりしたために、現在の有効土被り圧が過去受けた荷重よりも小さくなっている。また、「圧密降伏応力」と「サンプリング位置での有効土被り圧」との比を「過圧密比」と呼び、過圧密粘土の過圧密比は 1 より大きい（正規圧密粘土の過圧密比は 1）。

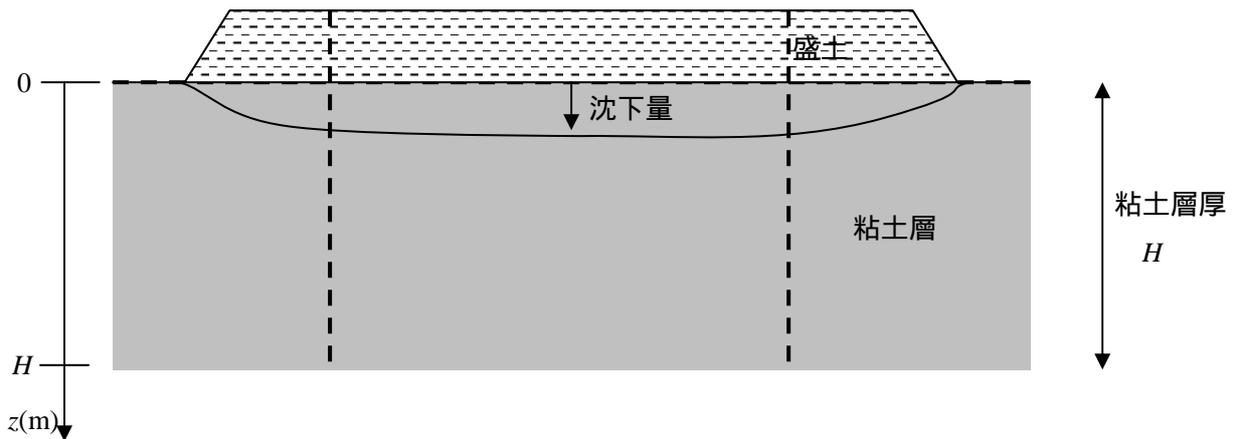
過圧密粘土と正規圧密粘土との重要な違いはその変形量にあるが、過圧密粘土の変形が正規圧密粘土地盤に比べて非常に小さいことを利用して、正規圧密地盤を人工的に過圧密粘土地盤にするプレローディング工法等もある（これについては圧密の最後の授業で）。

ややこしいことに、過去にそんな大きな荷重を受けたことがなくせに、過圧密粘土のように圧密降伏応力が大きく過圧密比が 1 よりも大きくなる粘土も存在する。そのような粘土を「疑似過圧密粘土」と呼ぶが、長い堆積環境下での物理化学的な作用により、土粒子間にセメンテーションが発達してそのような性質を示すものと考えられている。

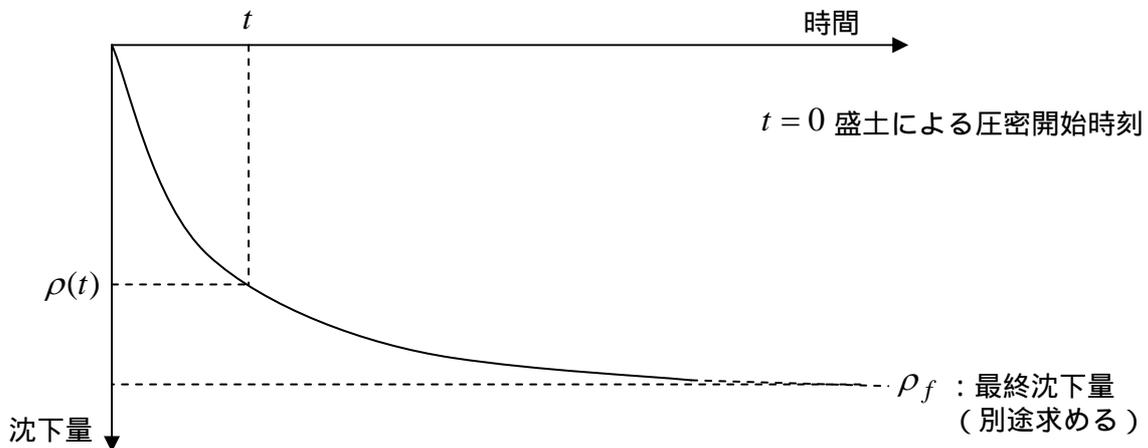
【圧密理論による粘土地盤の沈下解析】

圧密：土粒子と間隙水の混合体である土から，外力の作用によって間隙水が排水されるために起こる体積変化。土の透水係数は小さいために圧密には必ず時間遅れが伴う。

本講義では，一次元問題に単純化できる問題のみを扱う = 一次元圧密



圧密における時間～沈下量の関係



$$\rho(t) = U(t) \cdot \rho_f$$

$U(t)$  : 平均圧密度 0 ~ 100%      0% : 圧密が全く起こっていない状態  
 100% : 圧密が完全に完了した状態

沈下解析の目的：最終沈下量  $\rho_f$  とそれまで要するおおよその時間，あるいは，ある時刻  $t$  における沈下量  $\rho(t)$  を予測する。

## 最終沈下量 $\rho_f$ の求め方

体積圧縮係数  $m_v$  を使用

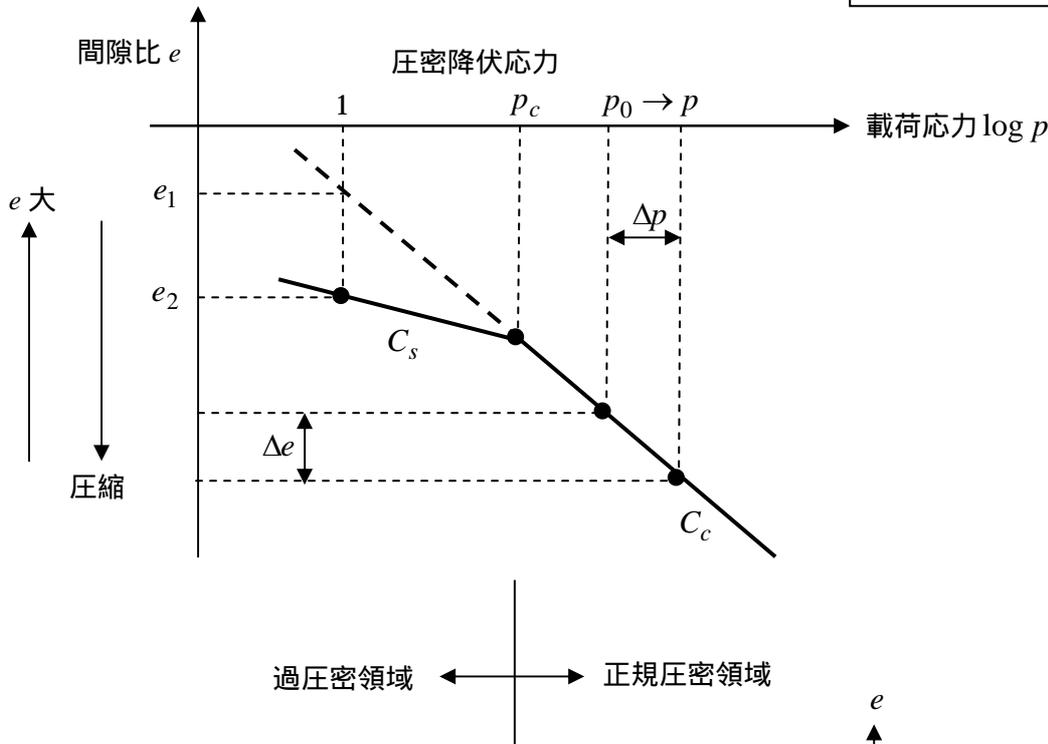
盛土載荷応力を  $\Delta p$  とした時，圧密終了時には地盤内の有効応力増分は  $\Delta\sigma' = \Delta p$  となっている。

$$\rho_f = \int_0^H \Delta\epsilon dz = \int_0^H m_v \cdot \Delta\sigma' dz = \int_0^H m_v \cdot \Delta p dz = m_v \cdot \Delta p \cdot H$$

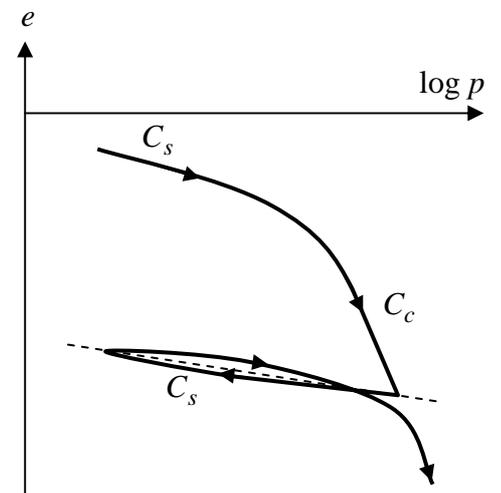
弾性圧密理論では  
構成式（応力とひずみを関係づける式）  
 $\Delta\epsilon = m_v \cdot \Delta\sigma'$

H: 粘土層全体の層厚  
沈下は粘土層全体が圧縮変形した結果として，地表面で観測されるものであるから，粘土層全体の厚さにひずみを掛けて沈下量（粘土層全体の変形量）を計算する。

$e \sim \log p$  関係を使用

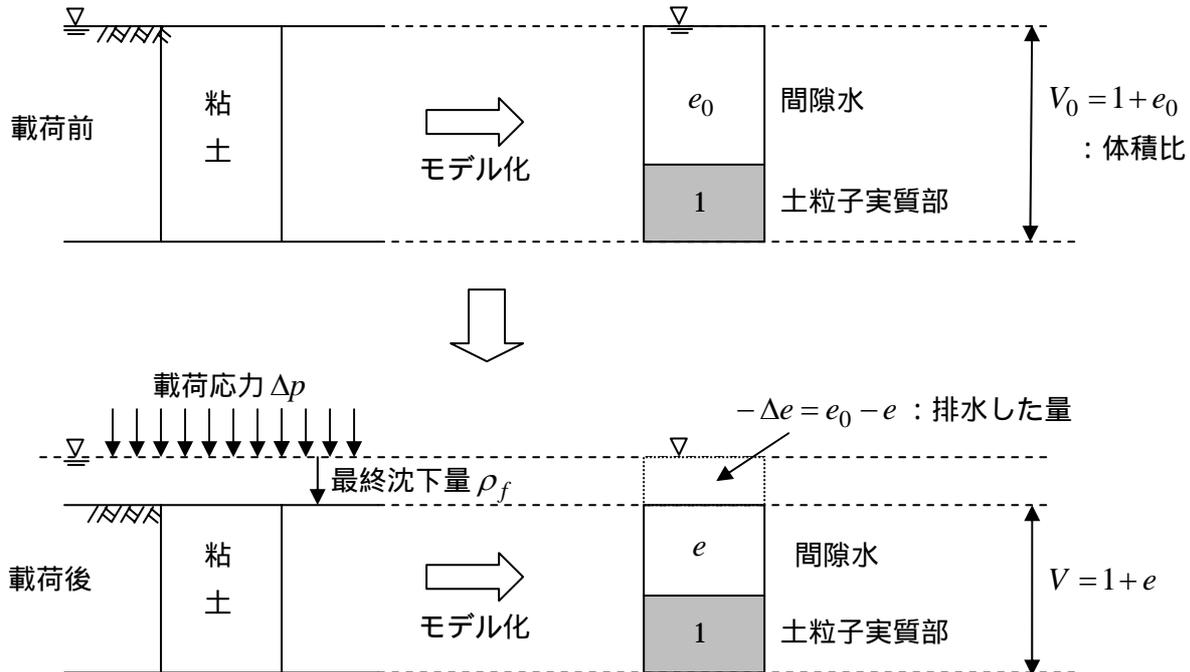


$\left\{ \begin{array}{l} p \geq p_c \text{ (正規圧密領域)} \\ e = e_1 - C_c \log p \\ p < p_c \text{ (過圧密領域)} \\ e = e_2 - C_s \log p \end{array} \right.$   
 $C_c$  : 圧縮指数  
 $C_s$  : 膨潤指数（膨潤：水を吸って膨らむこと）



載荷初期の過圧密状態の圧縮曲線の勾配  $C_s$  は計測しづらく誤差も多い，そのため一度大きな荷重まで載荷してから除荷して，過圧密状態をわざと作り出す。そのとき，粘土は水を吸って膨潤するので，その部分の  $e \sim \log p$  曲線の勾配を膨潤指数  $C_s$  と呼び，過圧密状態での圧縮曲線の勾配と等価と考える。

-1) 間隙比の変化  $\Delta e$  を直接使う方法



体積比の変化量(土粒子実質部を1としたときの割合での議論, 圧縮を正):

$$\Delta V = V_0 - V = (1 + e_0) - (1 + e) = e_0 - e = -(e - e_0) = -\Delta e$$

圧縮するほど  $e$  は小さくなる

圧密に伴うひずみ増分量  $\Delta \varepsilon$  : 
$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{-\Delta e}{1 + e_0}$$

最終沈下量は 
$$\rho_f = \int_0^H \Delta \varepsilon dz = \frac{-\Delta e}{1 + e_0} \int_0^H dz = \frac{e_0 - e}{1 + e_0} H$$

より厳密には,  $\varepsilon = \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{e_0 - e}{1 + e_0}$   
 より,  $d\varepsilon = \frac{-de}{1 + e_0}$  となる

-2) 载荷応力  $\Delta p$  (粘土地盤内の初期有効応力  $p_0$  からの応力増加量) を直接使う方法

i) 正規圧密領域のみで考える場合 ( $p_0 \geq p_c$ )

$$e_0 = e_1 - C_c \log p_0$$

$$e = e_1 - C_c \log(p_0 + \Delta p)$$

$$-\Delta e = e_0 - e = -C_c \log p_0 + C_c \log(p_0 + \Delta p) = C_c \log \frac{p_0 + \Delta p}{p_0}$$

$$\rho_f = \int_0^H \frac{-\Delta e}{1 + e_0} dz = \int_0^H \frac{C_c}{1 + e_0} \log \frac{p_0 + \Delta p}{p_0} dz$$

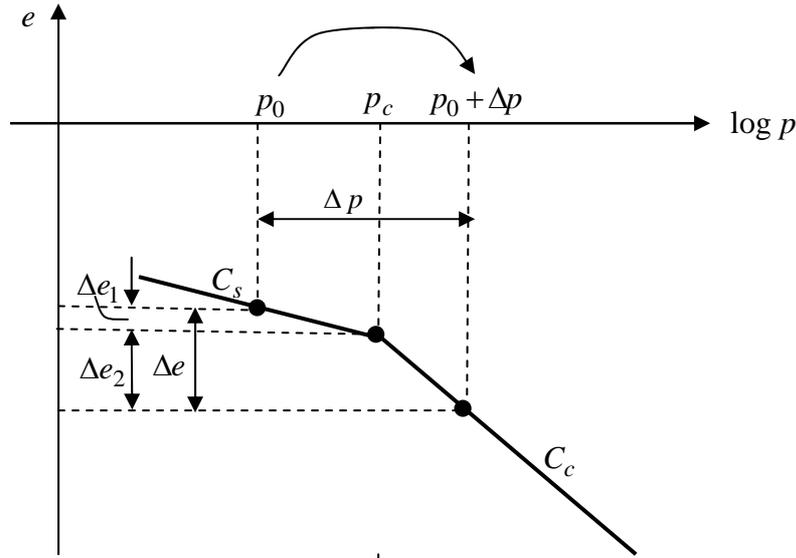
$$= H \frac{C_c}{1 + e_0} \log \frac{p_0 + \Delta p}{p_0} \quad (p_0 \geq p_c)$$

ii) 過圧密領域のみで考える場合 (  $p_0 + \Delta p \leq p_c$  )

$C_c \rightarrow C_s$  に変更するだけ

$$\rho_f = H \frac{C_s}{1+e_0} \log \frac{p_0 + \Delta p}{p_0} \quad (p_0 + \Delta p \leq p_c)$$

iii) 過圧密領域から正規圧密領域までまたがる場合 (  $p_0 < p_c$  かつ  $p_0 + \Delta p > p_c$  )



過圧密領域 ← → 正規圧密領域

$$-\Delta e_1 = C_s \log \frac{p_c}{p_0} \quad -\Delta e_2 = C_c \log \frac{p_0 + \Delta p}{p_c}$$

$$-\Delta e = -(\Delta e_1 + \Delta e_2)$$

$$\rho_f = \frac{-\Delta e}{1+e_0} H = \frac{H}{1+e_0} \left\{ C_s \log \frac{p_c}{p_0} + C_c \log \frac{p_0 + \Delta p}{p_c} \right\}$$

過圧密と正規圧密で共通の  $e_0$  を用いているが、 $p_c$  を境に圧縮性が急変するので、荷重を分けて考えるならば、正規圧密領域での沈下量の算定は、 $p_c$  の時の  $e$  を  $e_0$  と設定し直し、なおかつ、 $p_c$  までの圧縮量を差し引いた粘土層厚を  $H$  として再設定の方がより正確である。しかし、ここでは簡単のため、 $e_0$  も  $H$  も初期状態から沈下計算をする間は同じと仮定している。

このような仮定に基づく考え方を、微小変形理論と呼ぶ

ただし、過圧密領域での  $e$  の変化は小さいので、計算に与える影響は大きくない(はず)。

なお、これらの最終沈下量を求める計算で用いた定数  $m_v$ 、 $C_c$ 、 $C_s$  は圧密試験を実施して求める。

以上の例は、すべて  $p$  や  $e$  が粘土層内で一定とした場合である。これらが深さ  $z$  の関数であれば当然積分の中にも含める

結局、 $\rho(t) = U(t) \cdot \rho_f$  の  $\rho_f$  が求められたので、 $U(t)$  が得られれば、任意の時間での圧密沈下量  $\rho(t)$  が予測できる。

注：実務で一番重要なのは、 $\rho_f$  の大きさと、 $\rho_f$  に達するまでの時間(ある時刻にどれだけ圧密が進行しているか)である。

【圧密方程式の誘導】

(1) 瞬間載荷問題における Terzaghi の圧密方程式の誘導 (今期はこれを覚えればよい)

連続式  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}$  に ダルシー則  $v = -k \frac{\partial h}{\partial z} (= \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z})$  を代入して得られる

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  (式) と

構成式  $d\varepsilon = m_v \cdot d\sigma'$  を時間微分して得られる  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial t}$  に,

時間に対して荷重 (全応力) は一定という条件\* (瞬間載荷問題)  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} (= \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}) = 0$  を変形した

$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$  を代入して得られる,

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -m_v \frac{\partial u}{\partial t}$  (式) を等値することにより (要するに式 と の右辺どうしが =),

Terzaghi の圧密方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w})$  を得る。

注意:

\*力の釣り合い式  $\frac{\partial \sigma(z,t)}{\partial z} = 0$  (自重を無視) より, 全応力  $\sigma$  は深さ方向に対して一定であり,  $t$  のみの関数であることがわかる。そこで, Terzaghi の圧密方程式では, さらに時間に対しても全応力は一定であることを仮定するために, の条件式がでてくる。すなわち, 力の釣り合い式の  $\partial \sigma / \partial z = 0$  という条件がなければ,  $\partial \sigma / \partial t$  は 0 ではなく  $z$  の関数でもよいことになる。そういう点では, 力の釣り合い式を暗に用いていることになっている。

(2) 漸増載荷問題における三笠の圧密方程式による解法 (こういう解法もあるという紹介)

(2)-1 三笠の圧密方程式

Terzaghi の圧密方程式は, 時間に対して荷重は一定という特殊な条件から導かれているため, 瞬間的に荷重が載荷されて, そのまま一定である問題しか扱えない。その欠点を改善したのが三笠の圧密方程式である。

力の釣り合い式  $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  より,  $\frac{\partial \sigma'}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} = \gamma_w \cdot i$  が得られ,

ダルシー則  $v = k \cdot i$  を適用することにより,

$v = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial \sigma'}{\partial z}$  を得る。これに、構成式  $d\varepsilon = m_v \cdot d\sigma'$  を  $z$  で微分して得られる  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial z}$  を

適用すれば、 $v = \frac{k}{m_v \gamma_w} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$  となる。これに、連続式  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}$  を使えば、

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{m_v \gamma_w} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right)$  となり、 $z$  に対して  $\frac{k}{m_v \gamma_w} = c_v$  が一定と仮定すれば、

三笠の圧密方程式  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}$  を得る。

## (2)-2 三笠の圧密方程式の漸増載荷問題への適用

三笠の圧密方程式で漸増載荷問題を解く。漸増載荷問題とは、時間の経過とともに荷重が増える問題であり、実際には瞬間載荷などあり得ないので、実問題のほとんどは漸増載荷問題である。

漸増載荷条件は  $\sigma'(z,t) + u(z,t) = P(t)$  となる。(  $P(t) = 0$  は瞬間載荷問題である )

上式より、 $\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P(t)}{\partial t}$  ( 式 ) となる。また、力の釣り合い式より  $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  となる

が、もう一度  $z$  で微分しておくと、 $\frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$  ( 式 ) となる。

また、三笠の圧密方程式  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}$  に、構成式  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial z}$  をもう一度適用すれば、

$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2}$  となるので、これに式 と を代入すると、

結局  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial P(t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  となる。

ここで、 $u(z,t) = P(t) + V(z,t)$  とおいて変数変換してやると、

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$  および  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P(t)}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}$  より

$\frac{\partial V}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$  と変形でき、あとは境界条件にさえ気を付ければ解くことが可能となる。

【Terzaghi の圧密方程式の変数分離法による解法】

偏微分方程式が線形かつ同次であり、さらに境界条件式も線形かつ同次であれば、変数分離法により解析解を得ることができる。

線形：  $u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$  の一次式で表される。

同次：  $u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$  のみで表される

Terzaghi の圧密方程式 
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$  とおく、これを圧密方程式に代入すると、

$Z(z) \cdot T'(t) = c_v \cdot Z''(z) \cdot T(t)$  となるが、両辺にそれぞれの変数をまとめるように変形すると、

$$\frac{1}{c_v} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \text{const.} \quad (= -A^2) \text{ とおく}$$

結局、以下の  $t, z$  それぞれの常微分方程式で表すことができる。

$$T'(t) = -A^2 c_v T(t) \quad \dots$$

$$Z''(z) = -A^2 Z(z) \quad \dots$$

より、

$$T(t) = C_1 \exp(-A^2 c_v \cdot t)$$

より、

$$Z(z) = C_2 \cos Az + C_3 \sin Az$$

それぞれの解の積が  $u$  の解となる。すなわち、

$$u(z,t) = (C_4 \cos Az + C_5 \sin Az) \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t)$$

次に、境界条件式および初期条件式を用いて積分定数を決定する。

問題 (粘土層厚  $H$  の両面排水条件)

境界条件式：  $u(0,t) = u(H,t) = 0$

$$u(0,t) = C_4 \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0 \quad \text{より} \quad C_4 = 0$$

$$u(H,t) = C_5 \sin AH \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0 \quad \text{より,} \quad \sin AH = 0$$

したがって、  $AH = n\pi, \quad A = \frac{n\pi}{H}$

天下りの的に、この定数は負としているが、実はこの定数が正の場合は、境界条件を満たす有意な解は得られない。試しに、正と仮定して計算してみることに。

整理すると解は  $u(z,t) = C \sin \frac{n\pi}{H} z \exp(-\frac{n^2 \pi^2}{H^2} c_v \cdot t)$  となる。

一般解は、任意の  $n$  の解の重ね合わせで表すことができるので、

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{H} z \exp(-\frac{n^2 \pi^2}{H^2} c_v \cdot t)$$

となる。

さらに、初期条件式を使って、定数係数  $B_n$  を求める。

初期条件式  $u(z,0) = P_0$  から、

$$u(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{H} z = P_0$$

両辺に、 $\sin \frac{n\pi}{H} z$  を掛けて 0 から  $H$  まで  $z$  で積分する。

$$\int_0^H \{ (\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{H} z) \sin \frac{n\pi}{H} z \} dz = \int_0^H (P_0 \sin \frac{n\pi}{H} z) dz$$

直交関数の定理\*より、

$$\int_0^H (B_n \sin \frac{n\pi}{H} z \cdot \sin \frac{n\pi}{H} z) dz = \int_0^H (P_0 \sin \frac{n\pi}{H} z) dz$$

$$B_n \cdot \frac{H}{2} = \int_0^H (P_0 \sin \frac{n\pi}{H} z) dz$$

$$B_n = \frac{2}{H} \cdot \int_0^H (P_0 \sin \frac{n\pi}{H} z) dz = \frac{2P_0}{H} \left[ -\frac{H}{n\pi} \cos \frac{n\pi z}{H} \right]_0^H$$

$$= \frac{2P_0}{H} (-1) \frac{H}{n\pi} \{ (-1)^n - 1 \} = \frac{2P_0}{n\pi} \{ (-1)^{n+1} + 1 \}$$

最終的に問題（粘土層厚  $H$  の両面排水条件）に対する圧密方程式の解は、

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0}{n\pi} \{ (-1)^{n+1} + 1 \} \sin \frac{n\pi z}{H} \exp(-\frac{n^2 \pi^2}{H^2} c_v \cdot t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4P_0}{(2m+1)\pi} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{H} \exp(-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{H^2} c_v \cdot t) \end{aligned}$$

\*直交関数の定理

$$\int_0^1 \sin m\pi x \sin n\pi x dx = \frac{1}{2} \delta_{mn}$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}$$

【各種境界条件下での Terzaghi の圧密方程式の解】

Terzaghi の圧密方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  を

(1) 層厚  $H$  の粘土を片面排水条件で解く (問題 )

$u(z, t) = (C_1 \cos Az + C_2 \sin Az) \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t)$  までは, 境界条件, 初期条件に拘わらず同じ。

境界条件式:  $u(0, t) = \frac{\partial u(H, t)}{\partial z} = 0$

$u(0, t) = C_1 \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$  より  $C_1 = 0$

$\frac{\partial u(H, t)}{\partial z} = AC_2 \cos AH \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0$  より  $\cos AH = 0$

したがって,  $AH = \frac{2n-1}{2} \pi$ ,  $A = \frac{(2n-1)\pi}{2H}$

整理すると解は  $u(z, t) = C \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z \exp(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$  となる。

重ね合わせにより一般解は,

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z \exp(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t) \text{ となる。}$$

$n$  の値に  
注意する

初期条件式  $u(z, 0) = P_0$  から,  $u(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z = P_0$

両辺に,  $\sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z$  を掛けて 0 から  $H$  まで  $z$  で積分する。

$$\int_0^H \{ (\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z \} dz = \int_0^H (P_0 \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z) dz$$

直交関数の定理\*より,

$$\int_0^H B_n \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{2H} z dz = \int_0^H P_0 \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z dz$$

$$B_n \cdot \frac{H}{2} = \int_0^H (P_0 \sin \frac{(2n-1)\pi}{2H} z) dz = \frac{2HP_0}{(2n-1)\pi} \text{ より } B_n = \frac{4P_0}{(2n-1)\pi}$$

境界条件を満足する様々な波長の波を合成しており, それぞれの波の振幅  $B_n$  を調整することにより, あらゆる初期条件 (関数) にも対応できる。

フーリエ級数があらゆる関数を近似できるという素晴らしい特性

それぞれの波の振幅  $B_n$  をこのように決めたことにより,  $u = p_0$  (定数) を表現できる。

最終的に粘土層厚  $H$  の片面排水条件に対する圧密方程式の解は,

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4P_0}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2H} \exp(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4P_0}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2H} \exp(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 \frac{c_v \cdot t}{H^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v)$$

(ただし,  $M = \frac{(2n+1)}{2} \pi$ ,  $T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$ ,  $Z = \frac{z}{H}$ )

(2) 層厚  $2H$  の粘土の両面排水条件

境界条件式:  $u(0,t) = u(2H,t) = 0$

$$u(0,t) = C_1 \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0 \quad \text{より} \quad C_1 = 0$$

$$u(2H,t) = C_2 \sin 2AH \cdot \exp(-A^2 c_v \cdot t) = 0 \quad \text{より} \quad \sin 2AH = 0$$

したがって,  $2AH = n\pi$ ,  $A = \frac{n\pi}{2H}$

整理して重ね合わせにより一般解は,  $u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{2H} z \exp(-\frac{n^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$  となる。

初期条件式  $u(z,0) = P_0$  から,  $u(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{2H} z = P_0$

両辺に,  $\sin \frac{n\pi}{2H} z$  を掛けて 0 から  $2H$  まで  $z$  で積分する。

$$\int_0^{2H} \{ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{2H} z \} \sin \frac{n\pi}{2H} z dz = \int_0^{2H} (P_0 \sin \frac{n\pi}{2H} z) dz$$

直交関数の定理\*より,

$$\int_0^{2H} B_n \sin^2 \frac{n\pi}{2H} z dz = \int_0^{2H} P_0 \sin \frac{n\pi}{2H} z dz$$

$$B_n \cdot H = \frac{2HP_0}{n\pi} \{(-1)^{n+1} + 1\} \quad \text{より} \quad B_n = \frac{2P_0}{n\pi} \{(-1)^{n+1} + 1\}$$

最終的に粘土層厚  $2H$  の両面排水条件に対する圧密方程式の解は,

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0}{n\pi} \{(-1)^{n+1} + 1\} \sin \frac{n\pi z}{2H} \exp(-\frac{n^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4P_0}{(2m+1)\pi} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \exp(-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$$

ここで,  $M = \frac{(2n+1)}{2} \pi$ ,  $T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$ ,  $Z = \frac{z}{H}$  とおけば,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v)$$

となり, 層厚  $H$  の片面排水の解と同一であることがわかる。 (終わり)

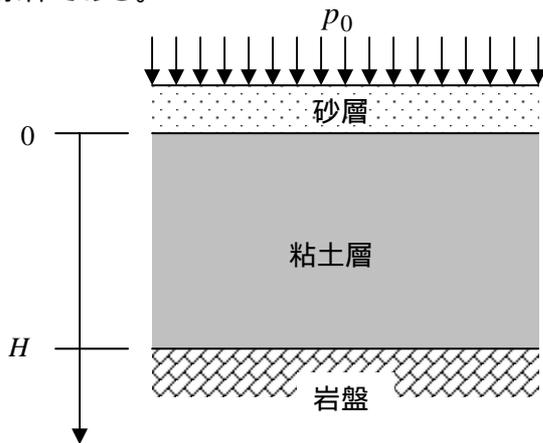
この結果より, 圧密方程式の解を用いる場合は, 排水長 (排水距離) :  $H$  における片面排水条件を基本とすることに注意。

【圧密方程式の初期条件, 境界条件と等時曲線】

順番が前後するが, 圧密方程式の解法がわかったところで, もう一度, 初期条件, 境界条件について復習する。

(1) 圧密方程式の初期条件, 境界条件 (圧密方程式と言えば暗黙に Terzaghi の圧密方程式である)

両面排水条件でも, 排水距離が半分の片面排水条件と同じ解であることがわかったので, ここでは層厚  $H$  の粘土層の片面排水条件の問題について考える。また, 境界条件, 初期条件と言っているが, 解くべきものは過剰間隙水圧 (静水圧からの変動分の水圧) なので, 当然過剰間隙水圧に関する境界条件と初期条件である。



砂層は伝統的に, 排水条件 (すなわち過剰間隙水圧  $u = 0$ ) を表すために用いられる。  
厚い砂層でなければ, 上載荷重がそのまま粘土層に伝わると考えて良く, 粘土層の圧密現象を考える上では, 排水の境界条件を与える役割だけであり, 事実上無視する。  
また, 砂の圧縮量は粘土の圧密変形に比べて非常に小さいので無視することも暗黙の了解になっている。

岩盤は伝統的に, 非排水条件 (すなわち流速  $v = 0$ ) を表すために用いられる。  
また, 非常に硬いので, それ以下の層は圧縮変形しない (すなわち粘土の圧密変形 = 地表面沈下) という, 暗黙の了解を含んでいる。

圧密方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  を解くために, 境界条件を設定するが, 境界は粘土層の上下端に 2つの境界があるため, 2つ設定することができる。

上端:  $u(0, t) = 0$ , 上端は砂層に接しているために, 時間に無関係に過剰間隙水圧は常にゼロとする。

下端:  $\left. \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right|_{z=H} = 0$ , 下端は岩盤に接しており, 岩盤は暗黙に不透水と仮定されるため, 時間に無関係にその境界においては, 常に流速  $v = 0$  とする。

$$\text{すなわち, } v = ki = -k \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ より, 冒頭の境界条件を得る。}$$

次に初期条件を設定する。

Terzaghi の圧密方程式の大きな仮定は, 「圧密荷重は瞬間的に載荷されて, ずっとその載荷重が一定のまま継続される」というものである。何度も例題で仮定したように, 載荷直後は粘土から排水されないために, 荷重の増分 (すなわち全応力の増分) はすべて間隙水圧が増加することにより受け持つことになる。間隙水圧は, 荷重増分  $p_0$  と同じだけ増加するが, その増加分が「過剰間隙水圧」に他ならない。すなわち, 過剰間隙水圧の初期条件は, 粘土層全体で同一であり,

$$u(z, 0) = p_0$$

となる。

問題を極端に表現すれば, 載荷完了までは粘土層から水の出入りがないように, 粘土層上端に遮水性のゴム膜を張っておき (初期条件), 圧密開始と同時に, 荷重を載せたまま, 「いち, にい, のさん」でゴム膜を瞬間的にはずす (境界条件) ようなイメージである。

まとめると、「前ページのように片面排水条件が仮定できる層厚  $H$  の粘土層に、上載荷重  $p_0$  が瞬間的に載荷されて、そのまま維持されたときの圧密現象の初期値・境界値問題」は、

圧密方程式： $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$	境界条件式： $u(0,t) = 0$ および $\left. \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right _{z=H} = 0$
初期条件式： $u(z,0) = p_0$	

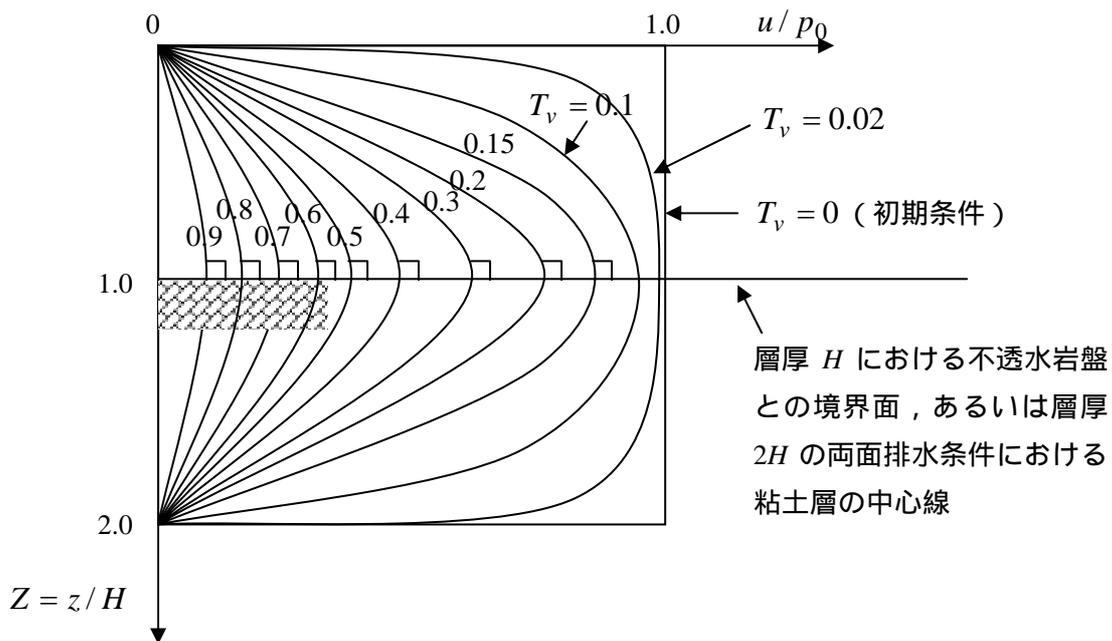
となる。  
これを解くと、

$$u(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_0}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v) \quad \left( \text{ただし, } M = \frac{(2n+1)\pi}{2}, T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}, Z = \frac{z}{H} \right)$$

が得られる。(層厚  $2H$  の両面排水条件での解と全く同じ)

(2) 過剰間隙水圧の等時曲線

以上の結果を、 $u/p_0$  を横軸に、 $Z = z/H$  を縦軸に、適当な時間係数  $T_v$  の間隔で図示する。

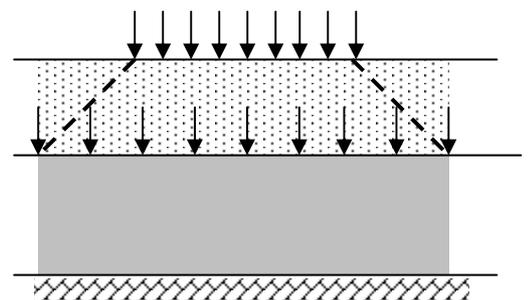


注：上図は精密に計算した結果ではなく、イメージ図なので、多少本物よりズレがあります。詳細は他の専門書で見ること。

上のような図を、等時曲線 (Isochrones: 英語読みはアイソクローン) と言う。

前ページ

粘土層の上の砂層が厚い場合は、上載荷重が砂層において分散すると仮定して計算する場合もある。分散の度合いは場合によって異なるので、その都度仮定する。普通は、分散されて直接粘土層上端に加わる載荷重を別途計算して、圧密の沈下量の計算を行う。(右図は分散して載荷面積が増えるために、粘土層に直接作用する圧力は、砂層に載荷される圧力より小さくなるという仮定。2次元的な仮定もあれば、3次元的な仮定もあるので注意する。)





(2)各モードの減衰

(1)で各モード( $n$  毎)の初期状態における  $\sin$  波の解のイメージがつかめたところで、今度は時間の経過につれて、それぞれのモードの解がどのように変化するか考える。

各モード  $\exp(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4H^2} c_v \cdot t)$  で時間変化(減衰)は支配されている。

$$\exp(\lambda_n \frac{\pi^2}{4} T_v) \quad (\text{圧密}) \text{ 固有値: } \lambda_n = -(2n-1)^2, \quad \text{時間係数: } T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -9 \\ \lambda_3 = -25 \\ \lambda_4 = -64 \\ \vdots \end{cases} \quad \downarrow$$

モード  $n$  が大きくなるにつれて、減衰が加速する

したがって、少し時間が経過すれば、  
圧密現象は  $n=1$  のモードによる解

$$\frac{4p_0}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2H} \exp(-\frac{\pi^2}{4} T_v) \quad \text{にほとんど支配されるようになる。}$$

(その他のモードは無視できるほど小さくなる)

逆に、圧密開始直後ほど、初期条件を満たすように高次( $n$  が大きい)のモードの解までが影響するために、複雑な解の構成となっており、圧密は複雑な振る舞いをして安定しづらい。

(すぐ後に勉強する) 圧密試験の整理法の  $\sqrt{t}$  法の欠点となっている。

圧密の速さは  $\exp(\lambda_n \frac{\pi^2}{4} T_v)$ 、すなわち時間係数  $T_v$  によって決まる。

時間係数  $T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$  は層厚  $H$  という境界条件を含んでいるが、粘土の性質だけで考えるならば、

$H$  が同じ場合、圧密係数  $c_v$  が大きな粘土ほど圧密が速い。さらに  $c_v = \frac{k}{m_v \cdot \gamma_w}$  であるから、

透水係数  $k$  が大きく、体積圧縮係数  $m_v$  が小さい粘土(硬い粘土)ほど圧密が速い。

なお、それ以外の要因(例えば  $p_0$  の大きさ等)は圧密の速さに無関係であることに注意する。

【平均圧密度と時間係数を用いた圧密時間の予測】

(1)平均圧密度\* (\*粘土地盤全体の平均した圧密度。圧密度と言えばこれを指すことが多い。)

もともと平均圧密度とは,  $U = \frac{\rho(t)}{\rho_f} = \frac{\text{時刻 } t \text{ の沈下量}}{\text{最終沈下量}}$  であった。

弾性圧密を考えると, 土の構成式より,

$$\varepsilon(z, t) = m_v \cdot \sigma'(z, t) = m_v \cdot \{P(t) - u(z, t)\} \quad \text{ただし, } P(t) \text{ は載荷重}$$

$$\rho(t) = \int_0^H \varepsilon(z, t) dz = m_v \int_0^H \{P(t) - u(z, t)\} dz = m_v \cdot P(t) \cdot H - m_v \int_0^H u(z, t) dz$$

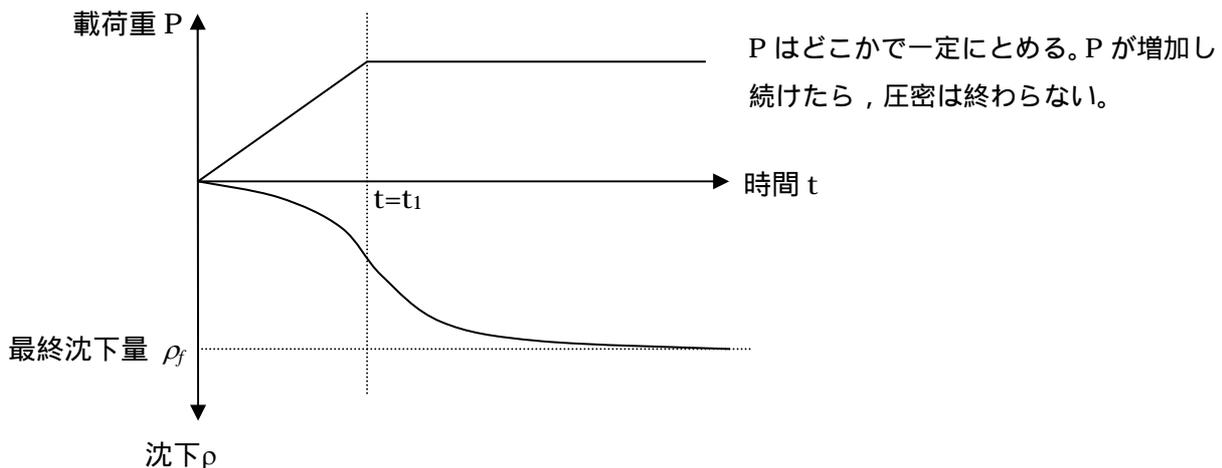
$t \rightarrow \infty$  の時  $u(z, \infty) = 0$  なので,

$$\rho_f = m_v \cdot P \cdot H \quad (\text{ただし, } P(\infty) = P \text{ とする})$$

特にことわらない限り, 載荷重も間隙水圧も有効応力も, 初期からの増分量である。

もちろん排水長 H を考え, 片面排水での解を用いる。

現実の粘土地盤への載荷問題は,



荷重  $P(t)$  が一定値  $P$  になったあと ( $t > t_1$ ) を考えると。

$$\rho(t) = m_v \cdot P \cdot H - m_v \int_0^H u(z, t) dz = \rho_f - m_v \int_0^H u(z, t) dz \quad \text{となる。}$$

その場合, 平均圧密度  $U$  は,

$$U = \frac{\rho(t)}{\rho_f} = \frac{\rho_f - m_v \int_0^H u(z, t) dz}{\rho_f} = 1 - m_v \int_0^H u(z, t) dz / m_v P H = 1 - \frac{1}{P H} \int_0^H u(z, t) dz$$

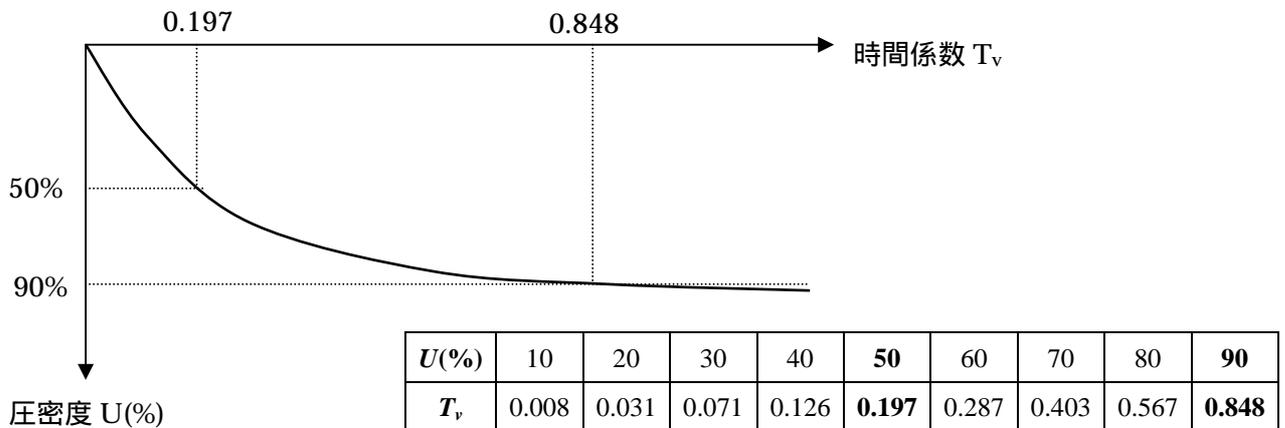
Terzaghi の一次元圧密ならば,  $u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P}{M} \sin MZ \exp(-M^2 T_v)$  なので

$$\int_0^H u(z, t) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2PH}{M^2} \exp(-M^2 T_v) \quad \text{となり, 結局}$$

$$U(T_v) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T_v) \quad \text{となる。}$$

(2)平均圧密度と時間係数

$$U(T_v) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T_v) \text{ を図示する。}$$



図中の2つの関係は覚えておく方が良い。

すなわち、90%圧密となる時間係数は0.848、50%圧密となる時間係数は0.197

(3)圧密時間の予測

圧密時間の予測の手順

$c_v$  はあらかじめ与えられているものとする。

排水長  $H$  を求める。( \*片面排水に注意する )

上図 ( $U \sim T_v$  関係) より、所定の圧密度に対する時間係数  $T_v$  を求める。

$$T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2} \text{ より, } t = \frac{T_v H^2}{c_v} \text{ から } t \text{ を求める。}$$

(例) 砂層に挟まれた層厚 20m の  $c_v = 2.0 \times 10^{-2} (\text{cm}^2/\text{s})$  の粘土地盤の 90% 圧密に要する時間を求めよ。

$$\text{(解) } T_v = 0.848 \text{ であるので, } t = \frac{0.848 \times 1000^2}{2.0 \times 10^{-2}} = 4.24 \times 10^7 (\text{sec}) = 491 (\text{days})$$

なお、同じ粘土ならば  $c_v$  および  $T_v$  が同じとなることを利用して、

厚さ 2cm (排水距離 1cm) の圧密試験で得た結果を、実地盤の沈下予測に用いる場合もある。

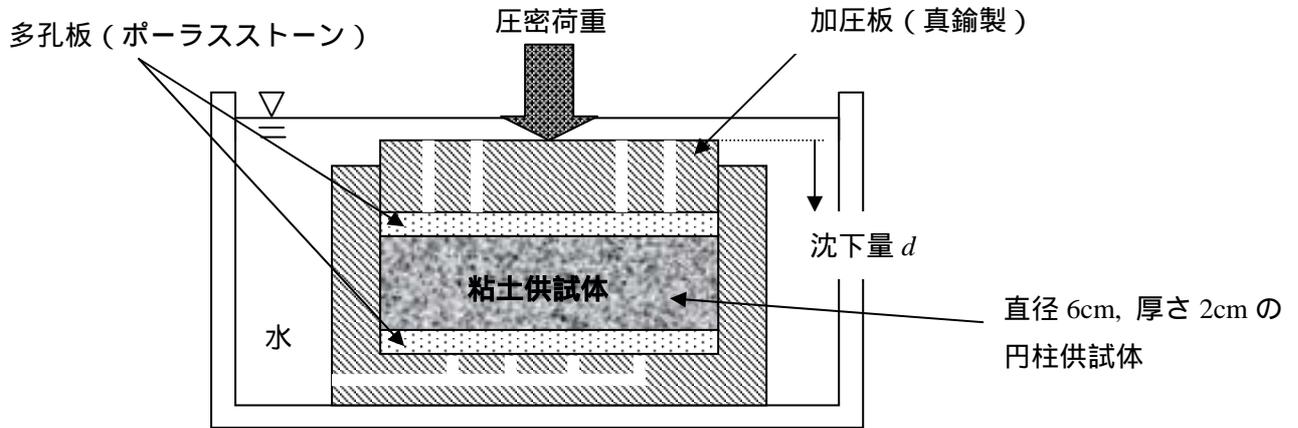
(例) 砂層に挟まれた層厚 20m の粘土地盤からサンプリングしてきた粘土で標準圧密試験を行った。

80% 圧密するのに 3 分間を要した場合、実際の地盤で 80% 圧密するのにどれだけ時間が  
必要か？

$$T_v = \frac{c_v \cdot 3}{1^2} = \frac{c_v \cdot t}{1000^2} \text{ より, } t = 3000000 (\text{min}) = 5.7 (\text{years})$$

【圧密試験とその結果の整理法】

(1) 圧密試験 (段階荷重による圧密試験法\*) \*最近は定ひずみ速度荷重による圧密試験もある。



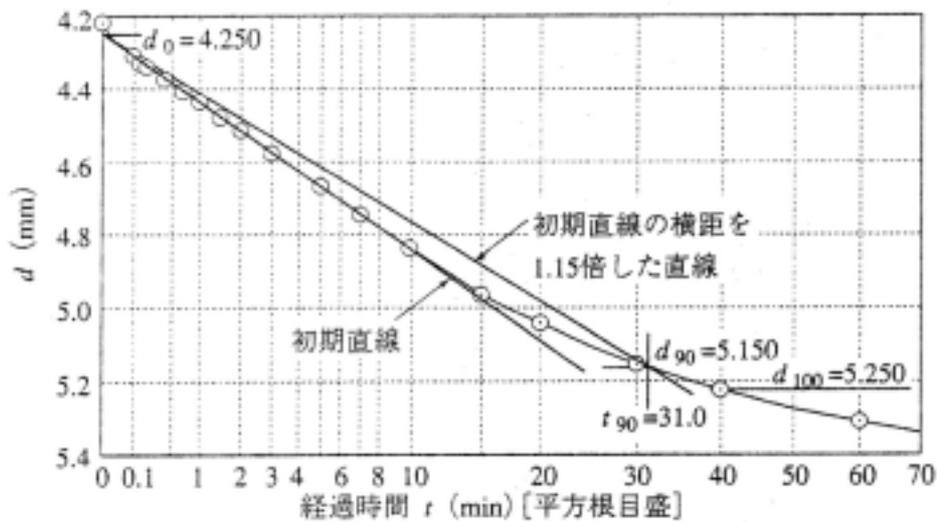
試験方法: 各圧密荷重段階において, ある時間経過毎の沈下量を計測する。

圧密荷重: 9.8, 19.6, 39.2, 78.5, 157, 314, 628, 1256 kN/m<sup>2</sup> ずつ段階的に荷重してゆく。

計測時間: 6, 9, 12, 18, 30, 42sec, 1, 1.5, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30, 40min, 1, 1.5, 2, 3, 6, 12, 24 hrs

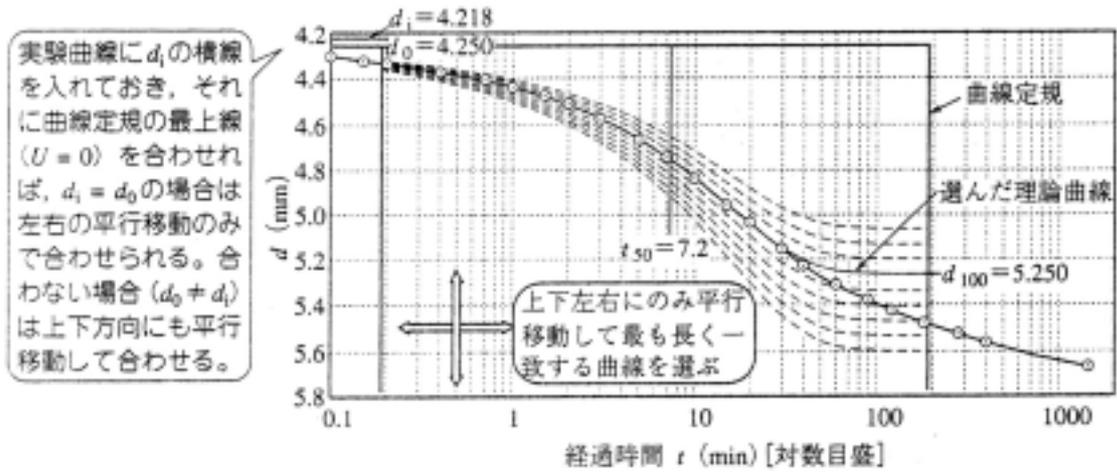
(2) 各荷重段階での試験結果の整理

$\sqrt{t}$  法

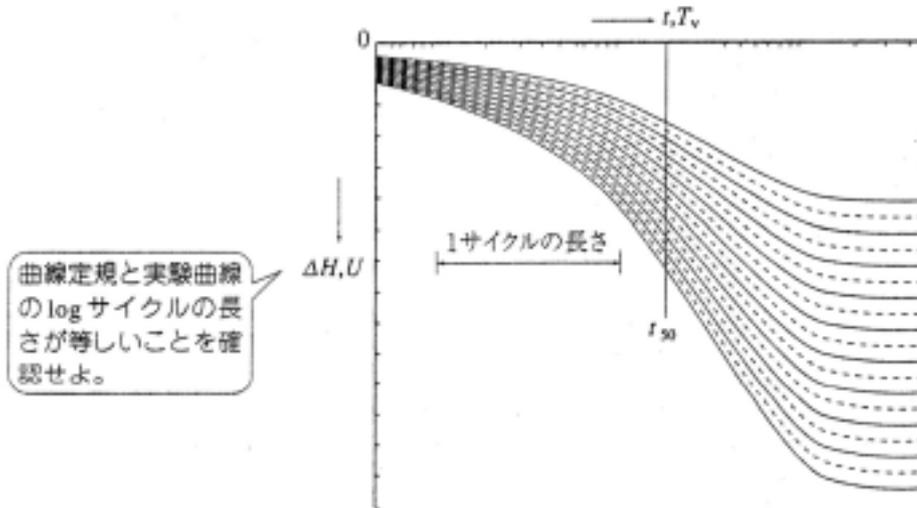


$\sqrt{t}$  法による整理の例

曲線定規法



曲線定規法による整理の例



曲線定規法

(社)地盤工学会：土質試験 - 基本と手引き - より

(3)全荷重段階終了後の試験結果の整理

圧縮曲線(  $e \sim \log p$  曲線)を描いて、圧密降伏応力  $P_c$ 、圧縮指数  $C_c$  を求める。

(4)圧密試験で得られる土質定数のまとめ

各荷重段階で得られる定数

圧密係数  $c_v$ ：圧密沈下量～時間関係

体積圧縮係数  $m_v$ ：荷重増分  $\Delta p$ ～圧縮ひずみ増分  $\Delta \varepsilon$  関係  $m_v = \Delta \varepsilon / \Delta p$

透水係数  $k = c_v \cdot m_v \cdot \gamma_w$

全荷重段階で得られる定数

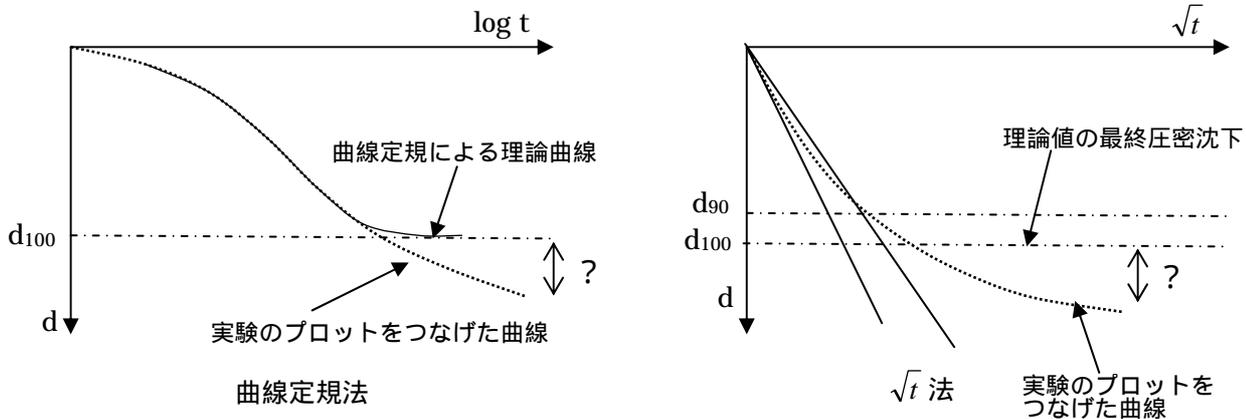
圧縮指数  $C_c$ ：間隙比～圧密荷重関係(圧縮曲線)

圧密降伏応力  $p_c$ ："

【圧密:その他の話題】

(1) 1次圧密と2次圧密

圧密試験の整理法



上記のように, Terzaghi の圧密理論による理論値の最終圧密沈下量は, ほとんどの場合において, 実験値の最終圧密沈下量よりも小さくなる。

Terzaghi の圧密理論にしたがう圧密沈下部分を一次圧密と呼び, それ以外の Terzaghi の圧密理論では説明できない圧密沈下部分を二次圧密と呼ぶ。

二次圧密は, 土骨格を弾性体と仮定している Terzaghi の圧密理論の限界を示している点で重要である。土骨格がバネのような弾性体とするならば, もし間隙水(が流れる抵抗)がなければ, 載荷すれば, 載荷した分に応じて瞬時に変形する。一方, 飽和土の場合には, 間隙水が排水されるのに時間を要するために変形に時間遅れが生じるものの, 間隙水が排水されてしまえば, その時点で変形は終了する。一次圧密とはそこまでの変形である。

もともと, Terzaghi の圧密理論は, 載荷によって発生した過剰間隙水圧が消散する過程を計算する。そのため, 圧密終了の理論値は, 載荷による過剰間隙水圧が消散した時点を示す。では, 実験の沈下量と理論値が合わないのは, 過剰間隙水圧が消散する時間の予測に狂いが生じるからだろうか?

実は, 圧密試験中に粘土試料内の過剰間隙水圧を計測した例があるが, その実験によると理論通りに過剰間隙水圧はほぼ消散していることが報告されている。すなわち, 実験の沈下量と理論値が合わないのは, 一見, 過剰間隙水圧が消散してしまった後も, いぜんとして沈下がだらだら続くためであると考えられる。(その際, マクロには過剰間隙水圧は消散してしまっているように見えるが, 実は局所的には, 過剰間隙水圧が発生したり, 消散したりしていると考えられている。)

では, なぜそのような現象が発生するのだろうか? それは, 土骨格がバネ(弾性体)のように, ある荷重をかければ変形量が決まってしまうのではなく, 土骨格自身の粘性やセメンテーション等による物理化学的な複雑な構造により, 同じ荷重をかけたとしても, 時間や有効応力状態等の様々な状況に応じて変形量が変わるものだからである。これを土骨格のクリープ現象と言う。クリープとは, 一定の荷重下で変形が進む現象のことである。洪積粘土や配布試料 No.3 の最後で紹介した疑似過圧密粘土がこのような性質を顕著に示すことが知られている。

## (2) サンドドレーン工法

ある目的の工事を行うために、地盤になんらかの手段を講じることを地盤改良と言う。特に、軟弱な粘土地盤上に構造物を作る場合には、それを支える力（支持力：後期で習う）が足りない場合や、たとえ支えることができても、透水性の低さから圧密変形がいつまでもたらだら続く場合が多い。そのため、軟弱粘土地盤に対して様々な地盤改良工法が開発されてきた。

その代表がサンドドレーン工法である。工法原理は以下の通り。

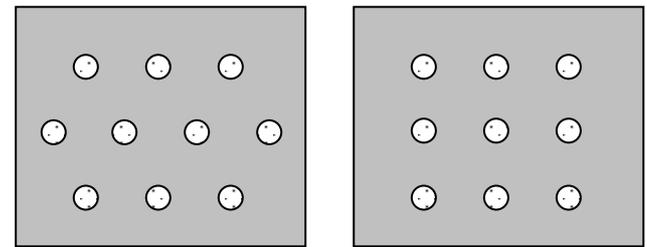
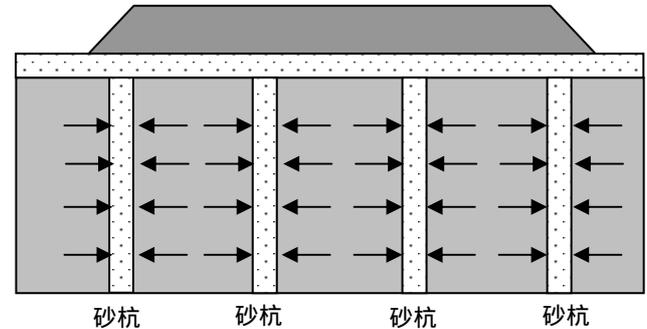
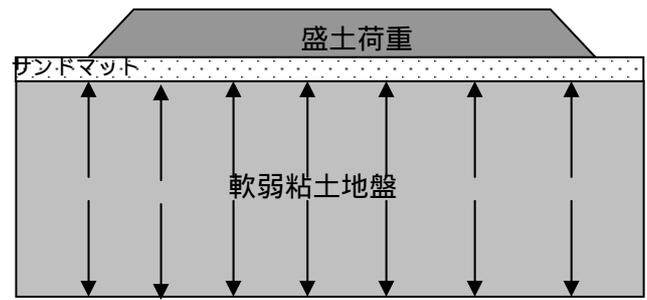
軟弱粘土地盤の支持力増強を目的として、盛土荷重を載せて粘土地盤を圧密させたい。地盤改良をしない場合には、右図のように、排水距離  $H/2$ （両面排水で層厚  $H$  の場合）となり、圧密にはかなりの時間を要し、次の工事に進めない。

（\*圧密すると粘土が強くなるのは次のせん断で習う。）

サンドドレーン工法は、地盤内に何本も砂杭を打設することにより、排水の方向を変えると同時に排水距離を短くする工法である。圧密の時間は排水距離の2乗に比例するので、排水距離を短くすることにより飛躍的に圧密時間を短縮できる。

右図はデフォルメして描いているが、実施工での杭直径の標準は40～50cmである。ケーシングという長い鉄パイプを地盤に圧入して、中に砂を投入する。砂杭間隔は設計によって異なるが、1m～2m程度である。

最近では透水性の良い良質な砂が少なくなってきたことから、紙を用いたペーパードレーン工法やプラスチック板を用いたプラスチックボードドレーン工法等も用いられている。それらを総称して、パーティカルドレーン工法と呼ぶ。



上から見たドレーンの配置

## (3) プレローディング工法

サンドドレーン工法では、盛土荷重を載せなければ圧密が起こらないので、盛土荷重はサンドドレーン工法に常にセットになっている重要な要素である。その荷重の大きさで、地盤改良の成否が決まると言っても過言ではない。地盤改良で用いられた盛土がそのまま構造物となる場合もあるが、多くの場合は地盤改良工事終了時点で盛土は一旦撤去され、それから本物の重要構造物が造られる。その場合のプレロード荷重（事前に载荷するという意味でプレ・ロード pre-load と呼ぶ）は、後で造られる構造物の荷重より必ず重くする。なせなら、プレロード荷重を一旦撤去すると、地盤は過圧密となり、その後の荷重がプレロードより小さい範囲にあれば、地盤は過圧密状態を維持することができ、変形は非常に小さくてすむからである。

粘土地盤でプレロード工法を用いる場合はサンドドレーン工法と併用される場合が多いが、透水係数の大きいシルト・砂質地盤などでは、サンドドレーンなしで単独で行われる場合も多い。

